16 ottobre 2020

Prop: Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e convesso
$f : \Omega \to \mathbb{R}$ convessa
Allora f è localmente superiormente limitata.

⚠ L'enunciato qui sopra ~~.....~~ non è vero in generale su spazi a dimensione infinita.

Controesempio $I = [-1, 1]$ $\left(C^1(I ; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty \right)$

$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$

← questa è una $\|\cdot\|_\infty$

$$C^1(I, \mathbb{R}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$$
$$g \longmapsto g'(0)$$

ϕ è lineare $(\lambda g_1 + \mu g_2)'(0) = \lambda g_1'(0) + \mu g_2'(0)$

$$\phi(\lambda g_1 + \mu g_2) = \lambda \phi(g_1) + \mu \phi(g_2)$$

ϕ non è continua $g_n = \frac{1}{n} \sin(n^2 t)$ $g_n \to 0$ $\phi(g_n) = g_n'(0)$

$\phi(g_n) = g_n'(0) = n \longrightarrow +\infty$. ϕ è convessa perché è lineare

$$\boxed{\phi(tu + (1-t)v) \le t\phi(u) + (1-t)\phi(v) \quad \forall t \in [0,1]}$$

se ϕ è lineare la disug vale con il segno $=$

—— o ——

Prop: $(E, |\cdot|_E)$, $(F, |\cdot|_F)$ sono sp. vett normati

$L : E \longrightarrow F$ lineare è continua $\Longleftrightarrow$ $\boxed{L \text{ è limitata su } \overline{B_E(0,1)} \quad (*)}$

$$\sup_{|x|_E \le 1} |Lx|_F = M < +\infty$$

$$B \doteq \overline{B_E(0,1)} = \{x \in E : |x|_E \le 1\}$$

—— o ——

$(\Longleftarrow)$ Se ho la limitatezza

$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \bar{x}$ in E

$$|L(x_n - \bar{x})|_F = |x_n - \bar{x}|_E \left| L\left(\frac{(x_n - \bar{x})}{|x_n - \bar{x}|_E}\right)\right|_F$$

sta in $B_E(0,1)$

$$\le |x_n - \bar{x}|_E \cdot M \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Longrightarrow f$ continua in $\bar{x}$.

$(\Rightarrow)$ [continua $\Rightarrow$ limitata]

Se ~~..~~ L non fosse limitata su B

Allora $\exists\ v_n \in B\ :\ \lambda_n \doteq |Lv_n|_F$, $\sup \lambda_n = +\infty$

$u_n = \dfrac{v_n}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ in E ma $|Lu_n|_F = \dfrac{1}{\lambda_n}|Lv_n|_F = 1$

allora non può essere continua #

OSS: Se $L : E \to \mathbb{R}$ ([con E sp. vett normato] L LINEARE)

Per avere la cont. basta verificare che L è sup. limitata su B_E.

Prop: Se E sp. vett. normato $\Omega \subseteq E$ aperto convesso

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ funz. convessa loc. superiormente limitata

allora f è continua in Ω

Dim. $\forall p \in \Omega\ \ \exists\, r > 0\ :\ \exists\, M$ t.c. $f(x) \leq M\ \ \forall x : |x-p| < r$

Tesi: allora f è continua in p

SPG. posso supporre $p = 0$ e $f(p) = 0$

$\tilde f(x) \doteq f(p+x) - f(p)$ la continuità di $\tilde f$ in 0 implica la cont di f in p

$\sup_{|x|\le r} f(x) \le M$

$0 \le \frac{r}{|v|} \le 1$

se $|v| < r$

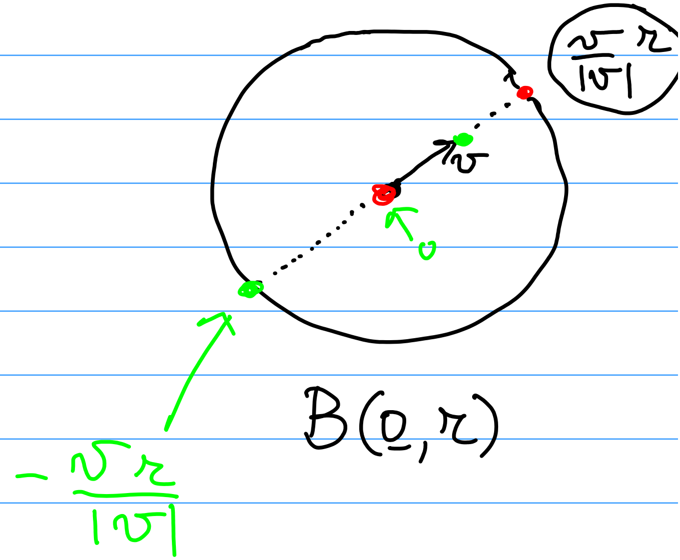
$$\boxed{\cancel{v = \left(1-\frac{r}{|v|}\right)\cdot 0 + \frac{r}{|v|}\cdot v}}$$

$$\boxed{\cancel{f(v) \le \boxed{\cancel{\left(1-\frac{r}{|v|}\right) f(0)}} + \frac{r}{|v|} f(\ )}}$$

$$v = \frac{|v|}{r}\cdot \frac{v r}{|v|} + \left(1-\frac{|v|}{r}\right)\cdot 0$$

$$f(v) \le \frac{|v|}{r} f\left(\frac{v r}{|v|}\right) + \boxed{\cancel{(\dots) f(0)}}$$

$$\boxed{f(v) \le \frac{|v|}{r} M}$$



$t \qquad\qquad (1-t)$

$$0 = \frac{|v|/r}{1+|v|/r}\left(-\frac{v r}{|v|}\right) + \frac{1}{1+|v|/r}\, v$$

$$0 = f(0) \leq \frac{|v|/r}{\boxed{\cancel{1+|v|/r}}}\, f\left(-\frac{v r}{|v|}\right) + \frac{1}{\cancel{1+|v|/r}}\, f(v)$$

$$\boxed{-f(v) \leq \frac{|v|}{r} M}$$

$$|f(v)| \leq \frac{M}{r}|v|$$

per $|v| \leq r$

$$\Downarrow$$

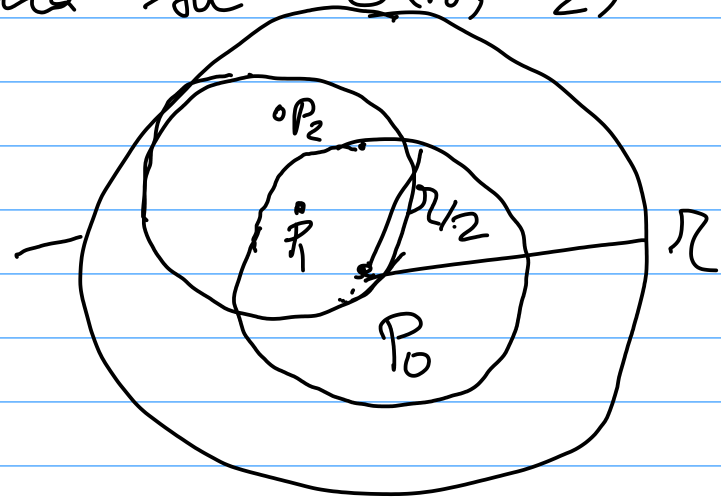
$\boxed{f \text{ è continua in } 0}$

OSS: Nelle ipotesi del teorema precedente f è anche localmente Lipschitziana.

Dim: Sia $P_0 \in \Omega$ fissato; $r>0$, $M>0$ t.c.

$$\sup_{B(P_0,r)} f \le M$$

$$\Rightarrow f \text{ è } \frac{M}{r}\text{-Lipschitziana su } B(P_0, r/2)$$



se $|P_1| < r/2$

allora la proposizione sopra mi assicura che

$$\boxed{|x-P_1| \le r/2} \Rightarrow |f(x)-f(P_1)| \le \frac{M}{r}|x-P_1|$$

perché questi stanno in $\overline{B(P_0,r)}$

$x \in \mathbb{R}^n$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

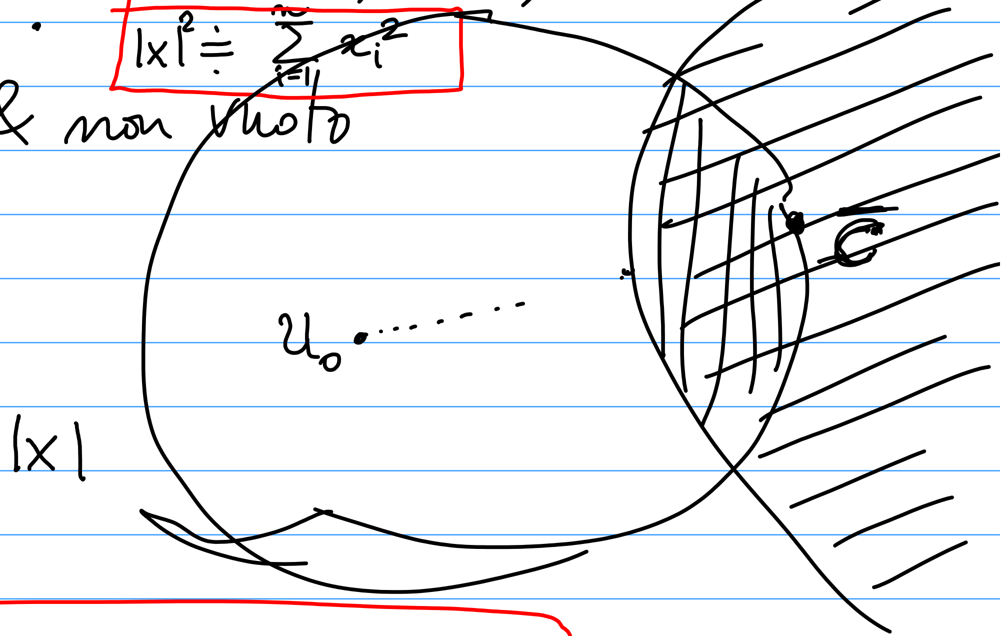
$\boxed{|x|^2 \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Proiezione su un convesso.

$C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso chiuso & non vuoto

$u_0 \in \mathbb{R}^n \setminus C$

$\varphi(x) = |x - u_0|^2$



(*) $\boxed{\inf_{x \in C} \varphi(x)}$

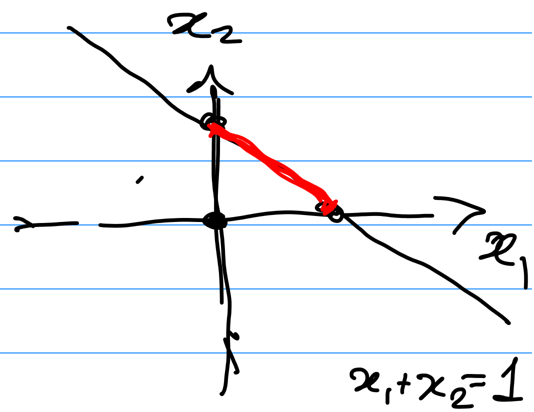
Tesi: Questo inf è un minimo ed è unico.

⚠ L'enunciato qui sopra potrebbe non valere per altre norme

p. es su $\mathbb{R}^2$ $\quad \|(x_1, x_2)\|_1 \doteq |x_1| + |x_2|$

$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\}$

$u_0 = 0$



Dim: fisso $\bar{c} \in C$, $R = |u_0 - \bar{c}|$

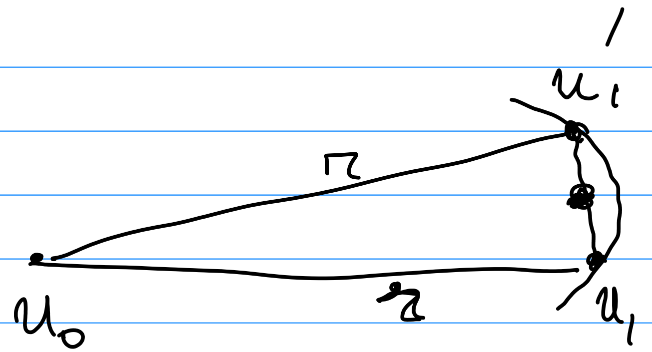
$$\inf_{x \in C} |x-u_0|^2 = \inf_{x \in \underbrace{C \cap \overline{B}(u_0,R)}_{\text{compatto}}} |x-u_0|^2 = \min_{x \in C \cap \overline{B}(u_0,R)} |x-u_0|^2$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$

$\exists\ u_1 \in C \cap \overline{B}(u_0,R)$ tale che $|u_1-u_0|^2$ realizza tale minimo

— o —

u_1 è unico. Infatti se così non fosse



Se $u_1 \neq u_1' \in C$ e $|u_0 - u_1|^2 = |u_0 - u_1'|^2 = r^2$

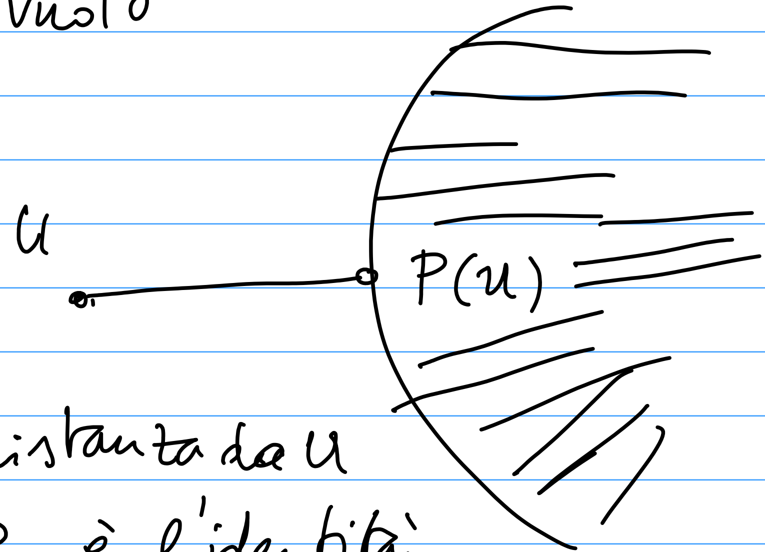
in tal caso $\left|u_0 - \frac{u_1 + u_1'}{2}\right|^2 < r^2$

$\frac{u_1 + u_1'}{2} \in C$ assurdo inquanto contraddice la minimalità di u_1 $\blacksquare$

Dato $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso chiuso non vuoto

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^n &\longrightarrow C \\ u &\longmapsto P(u) \end{aligned}$$

elemento di C che minimizza la distanza da u



$P_{|C}$ è l'identità

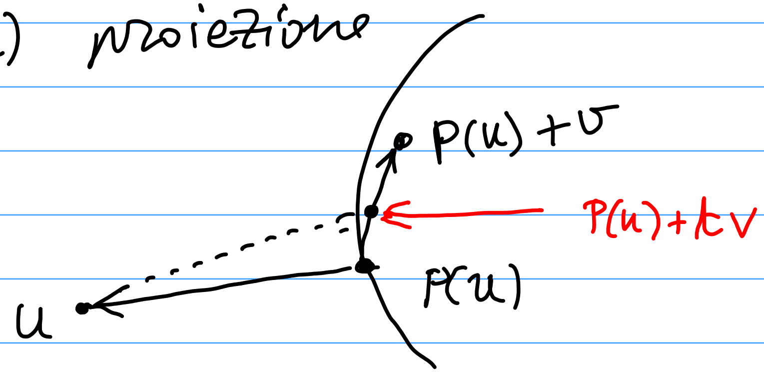
Prop: p è continua

Anzi: è 1-lipschitziana cioè $|P(u) - P(v)| \leq |u - v|$ $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$

— o —

Lemma: $u \in \mathbb{R}^n \setminus C$, $P(u)$ proiezione, v t.c. $P(u) + v \in C$

Allora $(u - P(u)) \cdot v \leq 0$ (*)



Dim: Se $t \in [0,1]$ considero $t \overset{\varphi}{\longmapsto} |\overbrace{p(u)+tv}-u|^2$

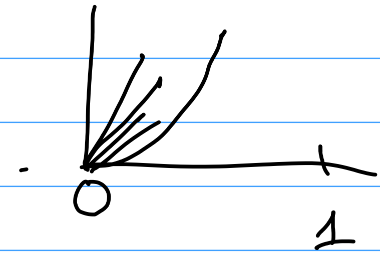
$\varphi(0)$ è punto di minimo su $[0,1]$

$$\varphi(t) = |p(u)-u|^2 + 2t\,(p(u)-u)\cdot v + t^2|v|^2$$

$$\varphi'(0) = 2\,(p(u)-u)\cdot v$$

0 minimo per φ su $[0,1]$ $\Rightarrow \varphi'(0) \geq 0$

$$(p(u)-u)\cdot v \geq 0$$



— o —

Dim. Prop SPG considero $u, w \notin C$

e considero

$$(u-w)\cdot(p(u)-p(w)) = \big[u-p(u)+p(u)-p(w)+p(w)-w\big]\cdot(p(u)-p(w))$$

$$= (u - p(u))\cdot(p(u) - p(w)) + |p(u) - p(w)|^2 + (p(w) - w)\cdot(p(u) - p(w))$$

CAUCHY-SCHWARTZ

$$|u-v|\,|p(u) - p(v)| \geq |p(u) - p(w)|^2$$

$$|u-v| \geq |p(u) - p(w)|$$