ANALISI 2

NOVAGA

22/10/2020

OSS: NEL TEO DI INV. LOCALE

SE $f \in C^k$, $k \geq 1$, $\Rightarrow f^{-1} \in C^k$.

SOTTOVARIETÀ DIFFERENZIABILI

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ È UNA SOTTOVARIETÀ DI DIM. $m < n$

È DI CLASSE C^k, $k \geq 1$, SE

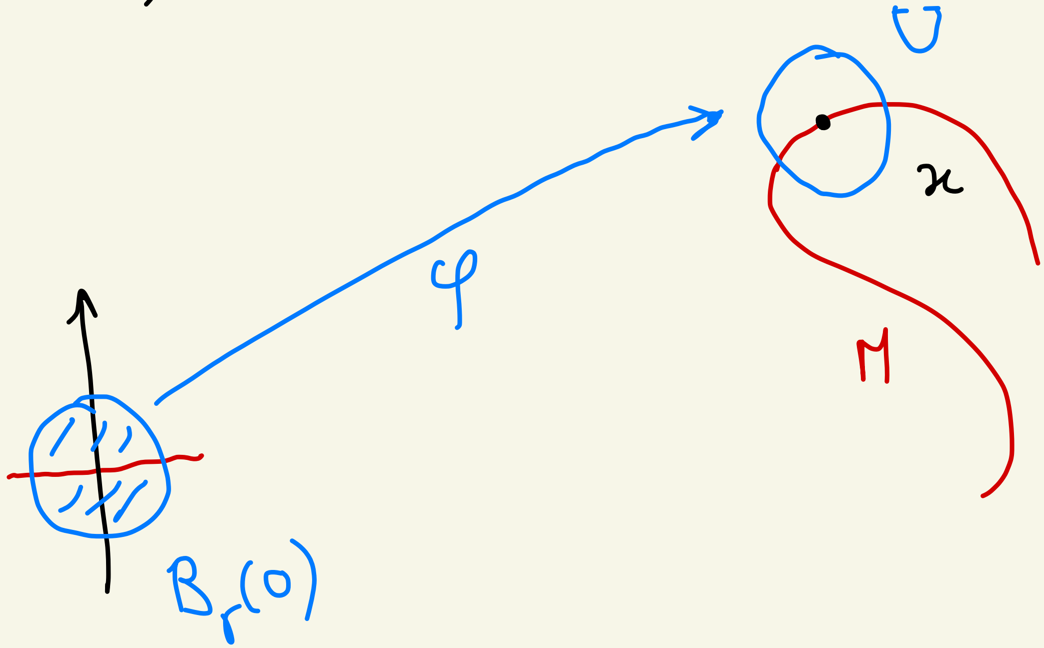
$\forall x \in M \quad \exists\, U$ INT. DI x IN $\mathbb{R}^n$,

ED ESISTE UN DIFFEOMORFISMO $\varphi \in C^k$

$\varphi : B_r(0) \to U$, $\quad B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, T.C.

$$\varphi\left(\underbrace{\left(\mathbb{R}^m \times \{0\}\right)}_{(n-m)\text{ DIM.}} \cap B_r(0) \right) = M \cap U.$$

$m = 1, \quad n = 2$



ESEMPIO (GRAFICI)

$f : \Omega \to \mathbb{R} \qquad \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \qquad f \in C^k$

$\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1},\ x \in \Omega \} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

È UN $(n-1)$-SOTTOV. DI CLASSE C^k

$$\varphi(\underset{\underset{\Omega}{\cap}}{x}, \underset{\underset{\mathbb{R}}{\cap}}{y}) = (x, y + f(x))$$

$\mathrm{Im}\, \varphi(\Omega \times \{0\}) = \Gamma_f$

ESEMPIO: $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\} = \partial B_r(0)$

È UNA $(n-1)$-SOTTOV. DI CLASSE C^∞

DEF: LE $(n-1)$-SOTTOV. SI CHIAMANO

IPERSUPERFICI

TEOREMA (FUNZIONI IMPLICITE)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $\quad f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$

$f = (f_1 \dots f_m)$ $\quad (x_0, y_0) \in \Omega, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m$

$$(D_y f)_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right) \qquad i, j \in \{1, \dots m\}$$

MATRICE $m \times m$

SE $D_y f(x_0, y_0)$ È INVERTIBILE $\Longrightarrow$

$\exists\, U$ INT. DI x_0 E $g \in C^k(U; \mathbb{R}^m)$ T.C.

(*) $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) \quad \forall x \in U$

CIOÈ POSSO RAPPRESENTARE L'INSIEME DI LIVELLO $\{(x, y) : f(x, y) = f(x_0, y_0)\}$, IN UN INTORNO DI (x_0, y_0), COME GRAFICO DI g:

$$\boxed{f(x, y) = f(x_0, y_0) \iff y = g(x)}$$

INOLTRE, DERIVANDO (*), SI HA

$$\boxed{Dg(x) = -\left(D_y f(x, y)\right)^{-1} D_x f(x, y)}$$

INFATTI: $D_x f(x, g(x)) = D_x f(x_0, y_0) = 0$

$= D_x f + D_y f \cdot D g \implies$

FUNZ. COMPOSTA

$D_y f$ INV.

$$Dg = -(D_y f)^{-1} D_x f$$

DIMOSTRAZIONE:

SEGUE DAL TEO DI INV. LOCALE

APPLICATO A $\tilde{f}(x,y) = (x, f(x,y))$

$\tilde{f} : \Omega \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\qquad D\tilde{f}(x,y) = \left(\begin{array}{c|c} Id & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array}\right)$

$\Rightarrow D\tilde{f}(x_0, y_0)$ INVERTIBILE

TEO DI INV. LOCALE

$\Longrightarrow C^k \ni \tilde{f}^{-1}(x,y) = (x, \tilde{g}(x,y))$

$\tilde{g} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{g} \in C^k$, $\tilde{f}(x, \tilde{g}(x,y)) = (x,y) \Longrightarrow$

$$\begin{array}{c} \tilde{f}(x,\tilde{g}(x,y)) \\ \parallel \\ (x, f(x, \tilde{g}(x,y))) \end{array}$$

$f(x, \tilde{g}(x,y)) = y.$

PONIAMO $g(x) = \tilde{g}(x, f(x_0, y_0))$

ED ABBIAMO

$$\boxed{f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)}$$

OSS: $f \in C^k$, $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

L'INSIEME DI LIVELLO $\{(x,y): f(x,y) = c\} =: L_c$

PUÒ ESSERE SCRITTO COME GRAFICO

DI UNA FUNZIONE C^k IN UN INTORNO

DI TUTTI I PUNTI $(x,y) \in L_c$ T.C.

$$rk(Df(x,y)) = m.$$

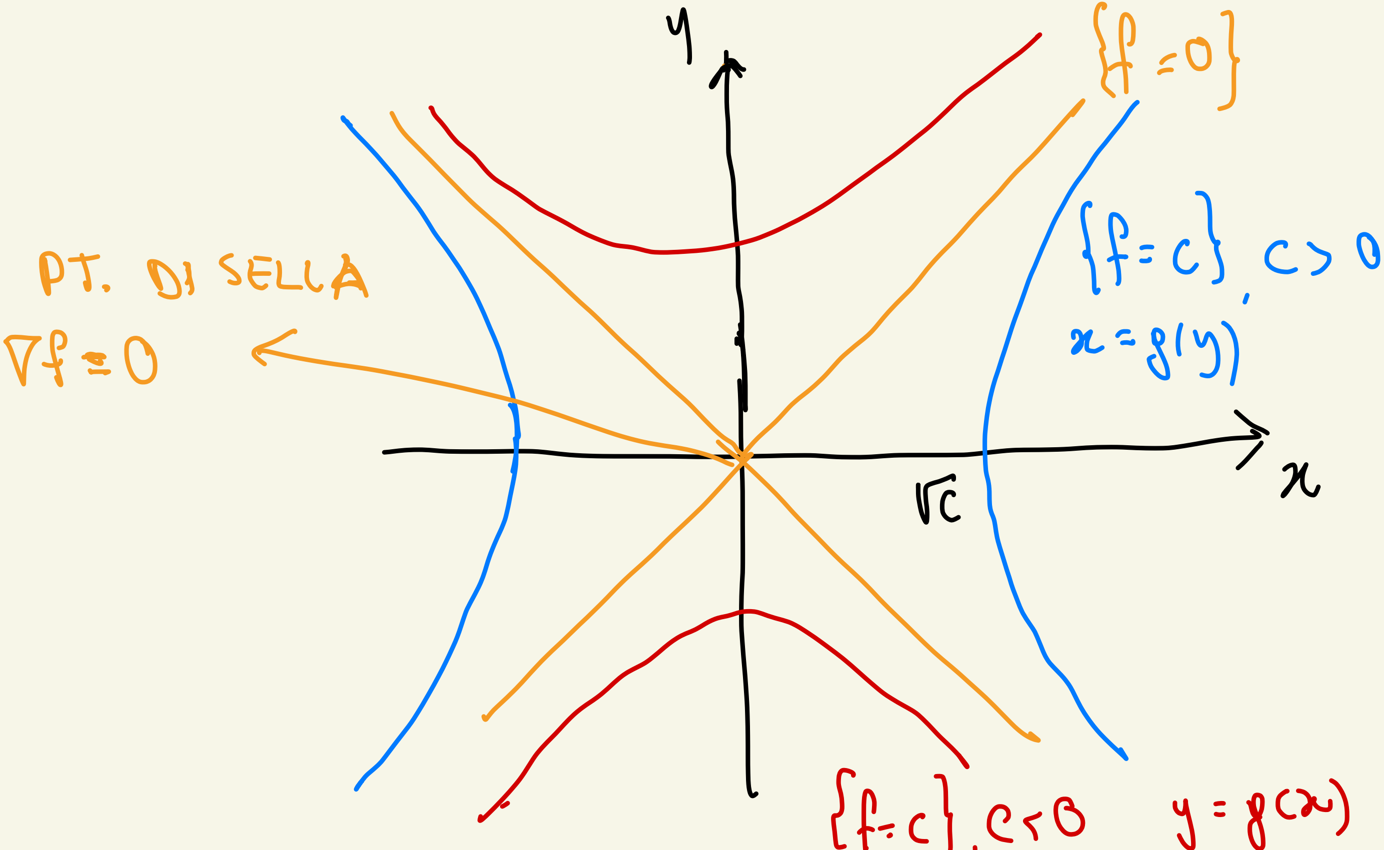
TALI PUNTI SI CHIAMANO

PUNTI REGOLARI DI $\{f = c\}$.

ESEMPIO: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = x^2 - y^2$

$n = m = 1$, $\quad \nabla f(x,y) = (2x, -2y) \neq 0$

$\iff (x,y) \neq (0,0)$



TUTTI I PUNTI SONO REGOLARI TRANNE $(0,0)$