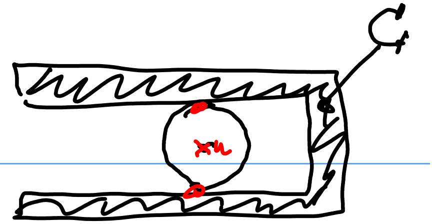
23 ott 2020



C chiuso <u>convesso</u> di $\mathbb{R}^n$; $(C \neq \emptyset)$

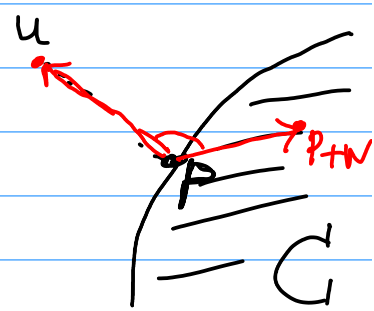
<u>Prop</u>: $\forall\, u \in \mathbb{R}^n \;\exists!\, p \in C$ tale che $\quad |p-u|^2 = \min_{x\in C} |x-u|^2$

inoltre si ha che $\boxed{(u-p)\cdot w \leq 0}$ (*) $\forall w$ tale che $p+w \in C$

$u \longmapsto p(u) \qquad p : \mathbb{R}^n \longrightarrow C \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad$ proiezione su un convesso

- L'applicazione p è continua (anzi 1-Lip)

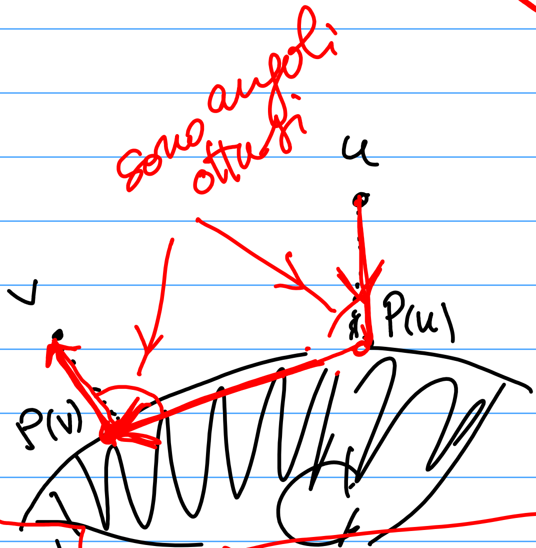
$$|p(u) - p(v)| \leq |u-v|$$



$$\boxed{|u-v|\cdot|p(u)-p(v)|} \geq [v-u]\cdot(p(v)-p(u)) =$$

$$= [v - p(v) + p(v) - p(u) + p(u) - u]\cdot(p(v)-p(u))$$

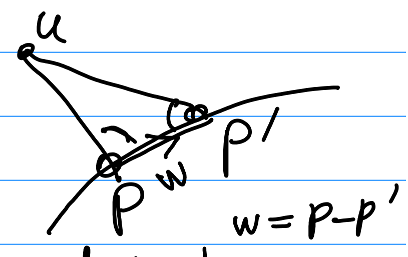
$$= \underline{(v-p(v))(p(v)-p(u))} + |p(v)-p(u)|^2 + \underline{(p(u)-u)(p(v)-p(u))} \geq \boxed{|p(v)-p(u)|^2}$$



$$|u-v|\cdot|p(u)-p(v)| \geq |p(u)-p(v)|^2 \quad \Rightarrow \quad |u-v| \geq |p(u)-p(v)|$$

Oss: 1) La proprietà (*) (cioè $(u-p)\cdot w \leq 0 \quad \forall\, w : p+w\in C$) caratterizza il punto $p \in C$ di minima distanza

2) Tutto quello che abbiamo detto può essere ripetuto sostituendo ad $\mathbb{R}^n$ uno sp. di Hilbert H (sp. con prod scalare def pos completo risp. alla norma indotta)



3) Se (il converso) C è uno spazio affine la proiezione p è la proiezione ortogonale.

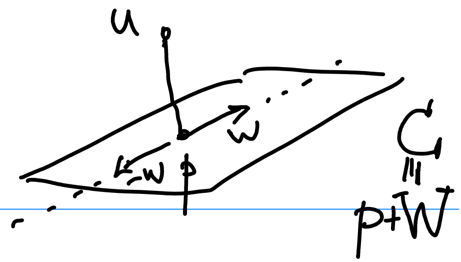
C affine $\Leftrightarrow \exists\, W$ sottosp. vett. di $\mathbb{R}^n$ t.c. $\forall\, \xi \in C$, $C = \underbrace{\xi + W}_{\{\xi + w \,:\, w\in W\}}$

se C affine, u, p come nella prop.

se $w \in W$ allora $\left\{\begin{array}{l} p+w \\ p-w \end{array}\right. \in C$

$$\left.\begin{array}{l}(u-p)\cdot w \leq 0 \\ (u-p)(-w) \leq 0\end{array}\right\} \forall\, w\in W$$

$$\Rightarrow (u-p)\cdot w = 0 \quad \forall\, w \in W$$



4) Se C è un sottosp affine allora

$$p(tu + (1-t)v) = t\,p(u) + (1-t)\,p(v) \qquad \forall t$$

e se C è un ssp. vettoriale $(0 \in C)$ allora p è lineare. (x esercizio)

Metodo dei minimi quadrati

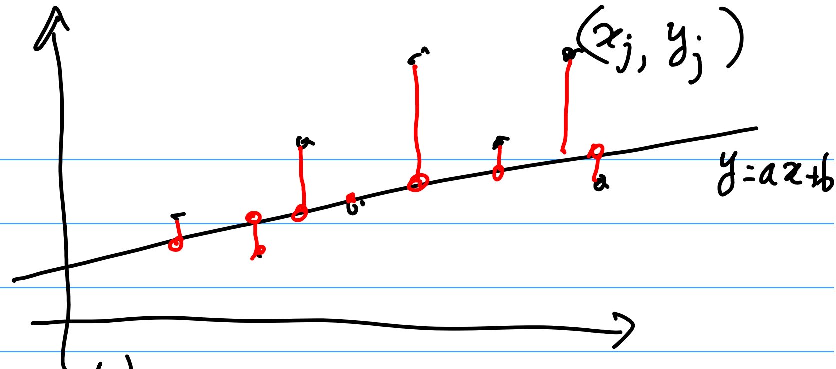
$(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ $\qquad$ $x_1, \dots, x_m$ diversi fra loro

Vogliamo trovare la retta che meglio approssima questi punti nel piano xy.

$y = ax + b$ $\quad$ cercare a, b in modo da minimizzare $\mathcal{E}(a,b)$

$$\mathcal{E}(a,b) = \sum_{j=1}^{m} \sigma_j \left[(a x_j + b) - y_j\right]^2$$

con $\sigma_j > 0$ // $\sigma_j = 1 \quad \forall j$



$\mathcal{E}$ è un polinomio di secondo grado nei parametri (a,b).

$\mathcal{E}$ è una funzione convessa in (a,b)

$$\partial_a \mathcal{E}(a,b) = \sum_j 2\left[a x_j + b - y_j\right] \cdot x_j \qquad \partial_a^2 \mathcal{E}(a,b) = 2\sum_j x_j^2$$

$$\partial_b \mathcal{E}(a,b) = \sum_j 2\left[a x_j + b - y_j\right] \qquad \partial_b^2 \mathcal{E}(a,b) = 2\sum_{j=1}^{m} 1$$

$$\partial_a \partial_b \mathcal{E}(a,b) = 2\sum x_j$$

$x = (x_1, \dots, x_m)$

$u = (1, \dots, 1)$

$$\partial_a^2 \mathcal{E}(a,b) = 2|x|^2 \qquad \partial_b^2 \mathcal{E}(a,b) = 2|u|^2 \qquad \partial_a \partial_b \mathcal{E}(a,b) = 2\, x \cdot u$$

$$H_{\mathcal{E}}(a,b) = 2\begin{pmatrix} |x|^2 & x\cdot u \\ x \cdot u & |u|^2 \end{pmatrix}.$$

non dipende da a, b

$H_{\mathcal{E}}$ è definita positiva

cauchy-schwarz

$$\det H_{\mathcal{E}} = |x|^2 |u|^2 - (x\cdot u)^2 \geq 0$$

(Nella disug. di Cauchy-Schwartz vale $>$ perché ho supposto x_j diversi tra loro.)

$H_{\mathcal{E}}$ è definita positiva $\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ strett. conversa $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ l'unico punto critico è minimo globale

$$\nabla \mathcal{E} = 0 \iff \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} [a x_j + b - y_j] x_j = 0 \\ \sum_{j=1}^{m} [a x_j + b - y_j] = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \underbrace{|x|^2}_{p} + b \underbrace{(x \cdot u)}_{q} = \underbrace{(x \cdot y)}_{r} \\ a \underbrace{(x \cdot u)}_{q} + b \underbrace{(u \cdot u)}_{m} = \underbrace{u \cdot y}_{s} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$$

risolvendo il sistema $\Rightarrow$ $\begin{cases} a_0 = \dfrac{mr - qs}{pm - q^2} \\ b_0 = \dfrac{-qr + ps}{pm - q^2} \end{cases}$

Per Taylor con resto di Lagrange questo è il minimo assoluto:

$$\mathcal{E}(a,b) = \mathcal{E}(a_0,b_0) + \cancel{\nabla\mathcal{E}(a_0,b_0)\cdot}(a-a_0, b-b_0) + Q \geq \mathcal{E}(a_0,b_0)$$

$\forall a,b$

forma quadratica positiva associata a $\frac{1}{2}H_{\mathcal{E}}$

$$Q = \boxed{\frac{1}{2}(a-a_0, b-b_0)\cdot H_{\mathcal{E}}(\xi,\eta)\cdot\begin{pmatrix} a-a_0 \\ b-b_0 \end{pmatrix}}$$

$H_{\mathcal{E}}$ è costante

Esercizio

(1) Verificare che $e^{x^2+y^2-xy}$ è strettam. convessa

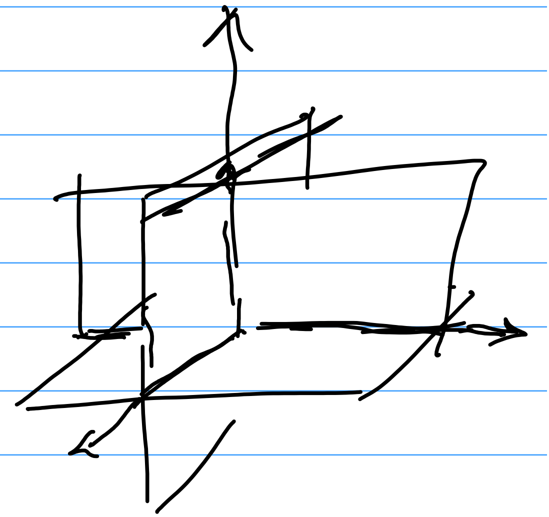
(2) Mostrare che se $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convessa & non decr.
$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ convessa

allora $f \doteq \varphi\circ g$ è convessa.

Studio di funzione

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + 3xyz$$

- trovare massimi e minimi locali
- studiare f su $Q^+ = \left\{ \begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \end{array} \right\}$



$$D(f) = \left\{ \begin{array}{l} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ z \neq 0 \end{array} \right\}$$

consta di otto ottanti sconnessi

$$\partial_x f(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + 3yz$$

$$\partial_y f(x,y,z) = -\frac{1}{y^2} + 3xz$$

$$\partial_z f(x,y,z) = -\frac{1}{z^2} + 3xy$$

∇f

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 3yz = \frac{1}{x^2} \\ 3xz = 1/y^2 \\ 3xy = 1/z^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2yz = 1/3 \\ xy^2z = 1/3 \\ xyz^2 = 1/3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= 1 \\ y/z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad x = y = z$$

$$x^2 \cdot x \cdot x = \frac{1}{3}$$

$$x^4 = \frac{1}{3}$$

$$|x| = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

I punti stazionari di f

$$\pm \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \right) = \pm P$$

$$\partial_x f(x,y,z) = -\frac{1}{x^2} + 3yz$$

$$\partial_y \partial_x f(x,y,z) = 3z$$

$$\partial_x^2 f(x,y,z) = 2/x^3$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2/x^3 & 3z & 3y \\ 3z & 2/y^3 & 3x \\ 3y & 3x & 2/z^3 \end{pmatrix}$$

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt[4]{27}$$

$$\det\left(H_f(P)\right) = 2 \cdot 3 - (1) + 1 \cdot (-1) = 4 > 0$$

tutti i det dei minori principali > 0 $\Rightarrow$ P è un

P è un minimo locale

$-P$ è un massimo locale

Domanda: P è minimo globale su $\mathbb{Q}^+$

Sì

$$Q_r = \left\{ x^2+y^2+z^2 \le r \ , \ x \ge \frac{1}{\sqrt[3]{r}} , \ y \ge \frac{1}{\sqrt[3]{r}} , \ z \ge \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right\}$$

Q_r è un compatto contenuto in Q^+

c cost positiva

(*) $\boxed{(x,y,z) \in Q^+ \setminus Q_r} \Rightarrow f(x,y,z) \ge c \sqrt[3]{r}$

Sapendo questo posso concludere che P è il punto di minimo assoluto su Q^+.

Traccia: fisso r_0 in modo che $c\sqrt[3]{r_0} > f(P)$

$$\inf_{Q^+} f = \inf_{Q_{r_0}} f = \min_{Q_{r_0}} f = f(P)$$

Traccia della dim

dettagli per esercizio.

<u>Es</u>: Se $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ è tale che

$H_f(x)$ è definita positiva $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow f$ è convessa

(× la prossima volta)