Lezione del 29 ottobre 2020

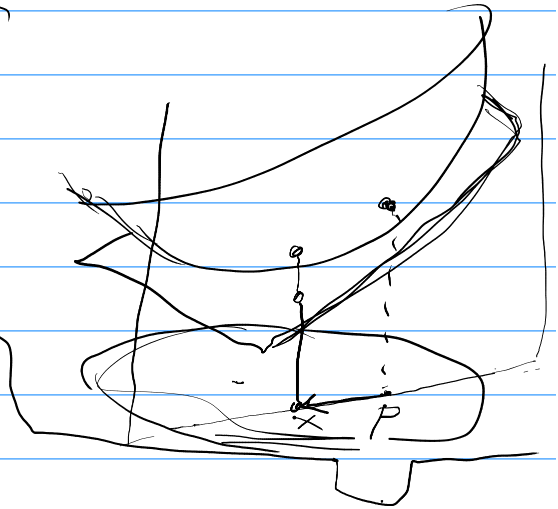
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

**Lemma 1** Sia $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ allora sono equivalenti

(i) $f$ è convessa

(ii) $\forall\, p \in \Omega,\ x \in \Omega$ $\quad f(x) \geq \overbrace{f(p) + \nabla f(p)\cdot(x-p)}$

$\mathcal{G}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$




**Lemma 2** Sia $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ allora sono equivalenti

(i) $f$ convessa

(ii) $D^2 f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ (ovvero la matrice Hessiana $H_f(x)$ semidefinita positiva $\forall x \in \Omega$)

$\boxed{\text{Dim lemma 1}}$ (i) $\Rightarrow$ (ii) deriva dall'analogo risultato unidimensionale osservando che $f$ convessa $\Rightarrow$ $\varphi(t) := f(p + t(x-p))$ è convessa

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\quad x_t = t x + (1-t) p \qquad x_0 = p,\ x_1 = x$

$t$ $\qquad f(x) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)(x - x_t)$

$1-t$ $\qquad f(p) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t)(p - x_t)$

$[t x + (1-t) p \quad - x_t] = 0$

$\oplus$

$$t f(x) + (1-t) f(p) \geq f(x_t) + \nabla f(x_t) \cdot [t(x - x_t) + (1-t)(p - x_t)]$$

$$t\, f(x) + (1-t) f(p) \geq f(t x + (1-t) p)$$

lemma 1

$\boxed{\text{Dim lemma 2}}$

$p \in \Omega$ fissato arbitrariam.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ $f$ convessa; per lemma$_1$ $f(x) \geq \underbrace{f(p) + \nabla f(p)(x-p)}$ $(*)$

Quindi $\phi(x) = f(x) - f(p) - \nabla f(p)(x-p)$ ha un minimo globale in $x = p$

$\phi(x) \geq 0$ (per $*$)

$\phi(p) = 0$

$$\Rightarrow H_\phi(p) \geq 0$$

$\overset{\shortparallel}{H_f(p)}$ perché $f$ e $\phi$ differiscono per un termine lineare affine

Oss: $H_f$ potrebbe avere qualche autovalore nullo

$f(x,y) = x^4 + y^4$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(ii) \Rightarrow (i)$

se ho che $D^2 f(p') \geq 0 \quad \forall p' \in \Omega$

Posso scrivere $\exists\, \xi \in (0,1)$ tale che $\to$ $f(x) = f(p) + \nabla f(p)(x-p) + \frac{1}{2} \underbrace{D^2 f(\underbrace{p + \xi(x-p)}_{p'}) [x-p]^2}_{\text{è} \geq 0}$

$f(x) \geq f(p) + \nabla f(p)(x-p) \xRightarrow{L1} f$ è convessa

è vero perché $D^2 f(p + \xi(x-p)) \geq 0$

Esercizio: (a) Mostrare che se $D^2 f(p) > 0 \ \forall p \in \Omega \Rightarrow f$ è strettamente convessa

$\not\Leftarrow$

(b) Mostrare che se $f$ è strett convessa ed $f$ assume minimo in $\Omega$
$\Longrightarrow$ il minimo è unico.

**Esempio**: Studiamo la funzione $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

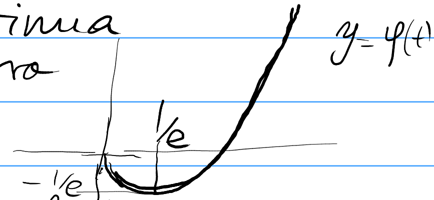
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i \qquad Q := \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} t \log t & \text{se } t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

$f$ è estendibile a $\overline{Q}$ scrivendo

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)$$

è continua e convessa




$$\varphi'(t) = \log t + 1$$
$$\varphi''(t) = 1/t > 0 \quad (\text{per } t > 0)$$

Q: $f$ ha minimo?

$$\nabla f(x) = (\log x_1 + 1, \dots, \log x_n + 1)$$

$$\nabla f(x) = 0 \iff x = x_0 = \frac{1}{e}(1, \dots, 1)$$

$\min f = f(x_0)$ e $x_0$ è pto di minimo assoluto ed è l'unico punto di minimo $\left\{ \begin{array}{l} \text{è minimo locale} \\ \text{di una funz.} \\ \text{strettamente convessa} \end{array} \right.$

$$\boxed{f(x) \geq -\frac{n}{e} \qquad \forall x \in Q}$$

$$H_f(x) > 0 \quad \forall x \in Q$$

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 1/x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/x_n \end{pmatrix}$$

è una matrice def positiva

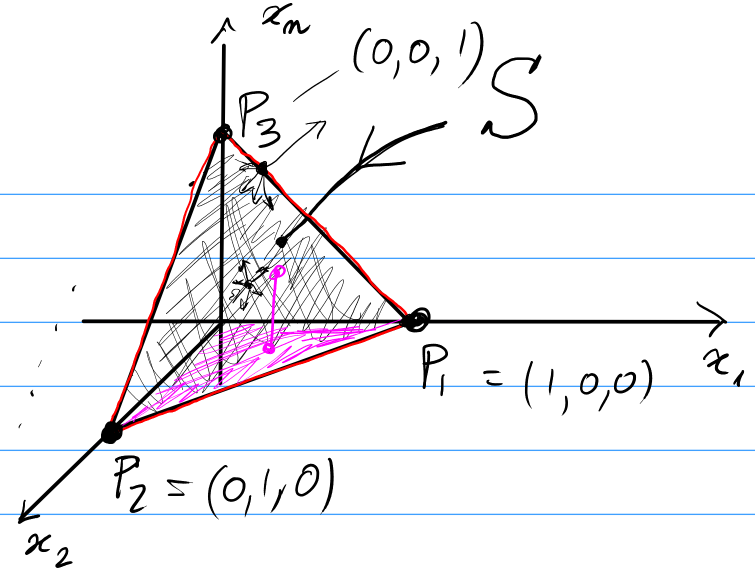
$$\Longrightarrow \quad f(x) \geq f(x_0) + \cancel{\nabla f(x_0)(x - x_0)}$$

(Per il lemma 1)

stretta convessità $\Longrightarrow$ $f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2} D^2 f(x_0 + \xi(x - x_0))[x - x_0]^2}_{> 0 \text{ se } x \neq x_0} \Longrightarrow$

---

Come cambiano le cose se cerchiamo massimi e minimi di $f$ sul simplesso $S \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1, \ x_i \geq 0 \ \forall i\}$




Oss: $f$ ammette massimo e minimo su $S$ per Weierstrass

Il minimo di $f$ non starà su $\boxed{S \cap \partial Q}$

Il massimo di $f$ sarà su $S \cap \partial Q$

Infatti $f_{|S}$ è una funzione strettamente convessa

(Esercizio: trovare il massimo)

Come faccio a localizzare il minimo?

Caso di problema di minimo vincolato

$g(\underline{x}) = x_1 + \dots + x_n - 1$

Due approcci sono possibili
- parametrizzare $S$ ⟵
- utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

se $x_0 \in Q$ punto di minimo sotto la condizione $g(x) = 0$ allora $x = x_0$ verifica il sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

è $n$ equazioni scalari

sistema di $n+1$ eq scalari in $n+1$ incognite $x_1, \dots, x_n, \lambda$

---

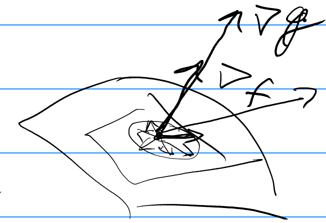
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \log x_1 + 1 \\ \vdots \\ \log x_n + 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \log x_1 + 1 = \lambda \\ \vdots \\ \log x_n + 1 = \lambda \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n$

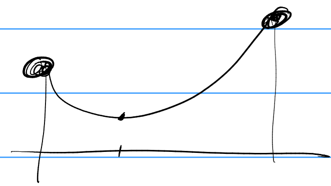
$\Longrightarrow x_i = \frac{1}{n} \quad \forall 1 \le i \le n$



$$\min_{x\in S} f(x) = f\left(\tfrac{1}{n},\dots,\tfrac{1}{n}\right) = \cancel{n}\cdot\frac{1}{\cancel{n}}\log\left(\tfrac{1}{n}\right) = -\log n$$

— o —

Caso 1-dim



$\Omega$ aperto, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $\quad f,g:\Omega\to\mathbb{R}\quad C^1$.

max e min di $f$ sotto la cond $g(x)=0$

sono sol di $\begin{cases}\nabla f(x) = \lambda\nabla g(x)\\ g(x)=0\end{cases}$

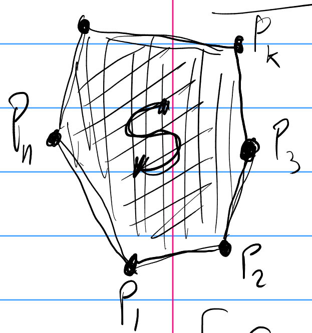
nel nostro caso $\Omega = Q = \{x_i>0\ \forall i\}$

$$\boxed{\max_{x\in S} f(x) = ?}$$

**Esercizio**: Se $S\subseteq\mathbb{R}^n$ è un simplesso (comb. convessa di un numero finito di pti $P_1,\dots,P_m$)

$f:S\to\mathbb{R}$ è convessa

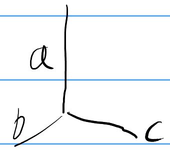
Allora $\displaystyle\max_{x\in S} f(x) = \max\{f(P_1),\dots,f(P_m)\}$




**Esercizio**: Tra tutti i parallelepipedi (con lati paralleli agli assi coordinati) di superficie laterale assegnata, determinare quello di volume massimo

$S = 2(ab+ac+bc)$

$Vol = abc$



massimizzare $f(a,b,c) = abc$ col vincolo

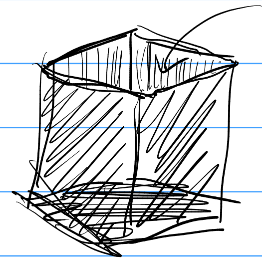
$$ab + ac + bc = S/2 \text{ costante}$$

$$(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$$

Variante dell'esercizio sopra: stesso problema, considerando le "scatole senza coperchio"

$$\boxed{ab + 2ac + 2bc = S}$$

vincolo



— o —

$$\max f(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$$

$$ab + 2ac + 2bc = S$$

$$(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$$

---

$Q$ aperto convesso

$f : \overline{Q} \to \mathbb{R}$ Conversa

$\exists\, p \in Q$ t.c. $\nabla f(p) = 0$ $\Longrightarrow$ $p$ è punto di minimo per $f$

Lemma 1 $\quad f(x) \geq f(p) + \nabla f(p)(x-p) \quad \forall x \in Q$