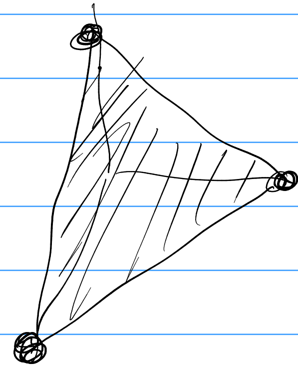
30 ottobre 2020

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ simplesso generato da $P_1, \dots, P_m$



$f : S \to \mathbb{R}$ convessa

$$\Rightarrow \max_{x \in S} f(x) = \underbrace{\max \{ f(P_i),\ 1 \le i \le m \}}_{M} \quad (*)$$

$$S \doteq \{ x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \ge 0 \quad \sum \lambda_i = 1 \quad x = \sum \lambda_i P_i \}$$

combinazione convessa dei P_i $1 \le i \le m$

$x \in S$

$$f(x) = f\left(\sum \lambda_i p_i \right) \le \sum \lambda_i f(P_i) \le M \underbrace{\sum \lambda_i}_{=1}$$

$$\boxed{f(x) \le M}$$

convesso

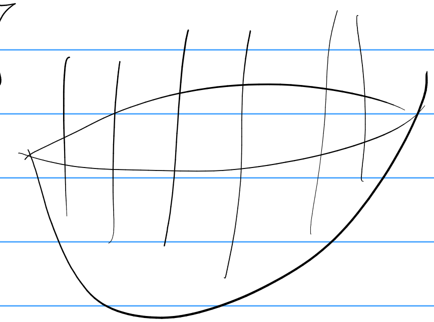
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

f convessa $\Longleftrightarrow$ $epi(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è convesso $\circledast$

$$= \left\{ (\underline{x}, y) : y \geq f(\underline{x}) \right\}$$

$\underline{x} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$
$y \in \mathbb{R}$



$\circledast$ $\left(p_1, f(p_1)\right), \dots, \left(p_m, f(p_m)\right)$ @

$p_i \in \Omega$

appartengono a $epi(f)$

$$\begin{cases} \lambda_i \geq 0 \\ \sum \lambda_i = 1 \end{cases}$$

$$\left(\sum \lambda_i p_i , \sum \lambda_i f(p_i) \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

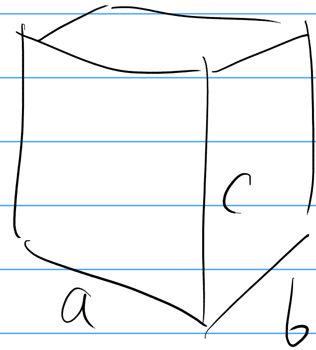
comb convessa dei vettori @

appartiene $epi(f)$ cioè

$$\sum \lambda_i f(p_i) \geq f\left(\sum \lambda_i p_i\right)$$

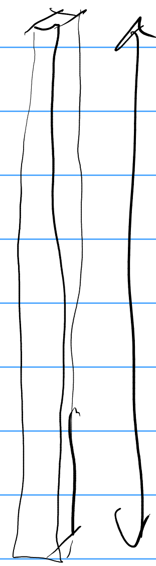
$$\Sigma := \{(a,b,c) : ab + bc + ac = 1\}$$

$$Q = \left\{(a,b,c) : \begin{array}{l} a>0 \\ b>0 \\ c>0 \end{array}\right\} \qquad \overline{Q} = \left\{ \begin{array}{l} a\geq 0 \\ b\geq 0 \\ c\geq 0 \end{array}\right\}$$



$$f(a,b,c) = a\cdot b\cdot c$$

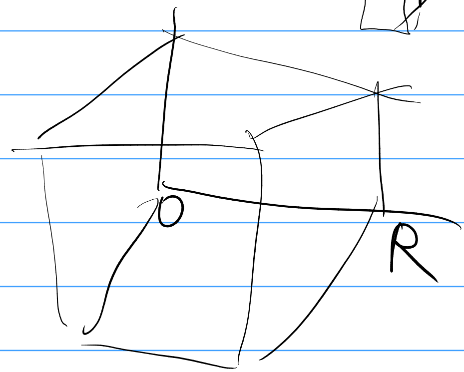
$$\max_{\Sigma\cap\overline{Q}} f \qquad \boxed{\min_{\Sigma\cap\overline{Q}} f = 0}$$



→ non è scontato che esista

$\Sigma \cap \overline{Q}$ non è limitato ⚠

$$Q_R = \left\{(a,b,c) : \begin{array}{l} 0\leq a\leq R \\ 0\leq b\leq R \\ 0\leq c\leq R \end{array}\right\}$$



⊛ $(a,b,c) \notin Q_R \Longrightarrow f(a,b,c) \leq \frac{1}{R}$

Dim ⊛: $(a,b,c) \in Q_R \Longrightarrow \max\{a,b,c\} > R$

spg: $a > R$

$ab + bc + ac = 1 \qquad (a, b, c \geq 0)$

$ab \leq 1 \qquad b \leq \frac{1}{a}$

$ac \leq 1 \qquad c \leq 1/a$

$f(abc) = a \cdot b \cdot c \leq a \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$

$\leq 1/R$

— o —

Cerco i punti stazionari vincolati su

$\Sigma \cap Q \qquad \Sigma = \{ab + ac + bc = 1\}$

Uso i moltiplicatori di Lagrange: $(a, b, c) \in \Sigma \cap Q$ è staz per $f|_{\Sigma}$

allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} \nabla f(a,b,c) = \lambda \nabla g(a,b,c) \\ g(a,b,c) = 0 \end{cases}$$

sist 4 eq in 4 incognite

NON LINEARE

$g(a,b,c) = ab + ac + bc - 1$

$$\nabla f(a,b,c) = \begin{pmatrix} bc \\ ac \\ ab \end{pmatrix} \qquad \nabla g(a,b,c) = \begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} bc = \lambda(b+c) \\ ac = \lambda(a+c) \\ ab = \lambda(a+b) \\ ab + ac + bc = 1 \end{cases}$$

a, b, c, λ

$$\begin{cases} c(b-a) = \lambda(b-a) \\ b(c-a) = \lambda(c-a) \\ a(c-b) = \lambda(c-b) \\ ab+ac+bc = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} (c-\lambda)(b-a)=0 & \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ (b-\lambda)(c-a)=0 & \mathrm{I}-\mathrm{III} \\ (a-\lambda)(c-b)=0 & \mathrm{II}-\mathrm{III} \\ ab+ac+bc=1 \end{cases}$$

$a=b=c$ e $\lambda = a/2$ soddisfa le prime 3 equazioni

$3a^2 = 1 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ($-\frac{\sqrt{3}}{3}$ non va bene perché $a>0$)

Esercizio: verificare che il sistema non ha altre soluzioni (per casi)

—— o

L'unico pto stazionario di $f_{|\Sigma}$ che sta in Q è

$P_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$ Q: È il massimo?

$f(P_0) = \frac{\sqrt{3}}{9}$ è massimo? SÌ

Sì: Scelgo $R>0$ t.c. $\frac{1}{R} < \frac{\sqrt{3}}{9}$. Allora so che

$$\sup_{\Sigma \cap \overline{Q_R}} f = \max_{\Sigma \cap \overline{Q_R}} f = f(P_0)$$

Se $x \in \Sigma \cap \left(\overline{Q} \setminus \overline{Q_R}\right)$ allora $f(x) < \frac{1}{R} < \frac{\sqrt{3}}{9} = f(P_0)$

$$\Rightarrow f(P_0) \geq f(x) \quad \forall\, x \in \Sigma \cap \overline{Q}$$

$C = \{(x,y) : x^2 y + e^{x+y} = 0\}$

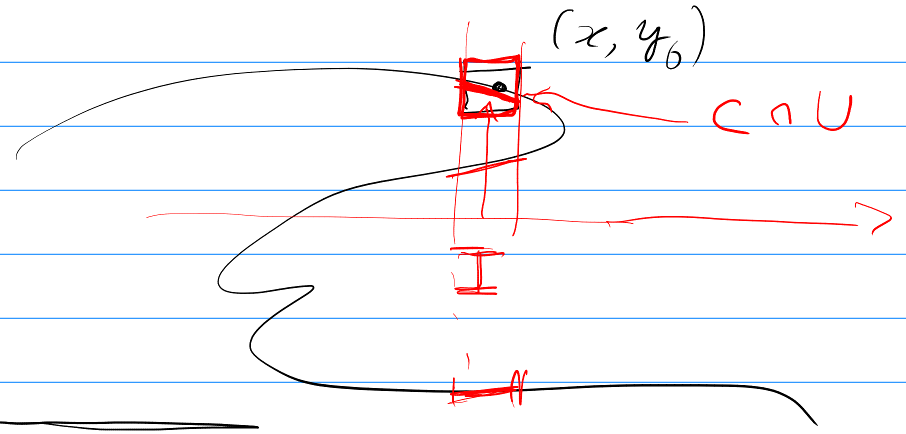
Mostrare che questa espressione definisce implicitamente una funzione $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$C = \mathcal{G}(\varphi)$

TEO (DINI): $f(x,y)$ funzione $C^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x_0,y_0) = 0$, $\partial_y f(x_0,y_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ L'insieme di livello $f(x,y) = 0$ è <u>localmente</u> un grafico $(x, \varphi(x))$ di una funzione $\varphi \in C^1$ in un intorno di (x_0, y_0)

$\exists\, U = I \times J$ intorno di (x_0, y_0) e $\exists!\, \varphi : C^1(I, \mathbb{R})$ tale che

$$C \cap U = \{(x, \varphi(x)) : x \in I\}$$



$$C = \{(x,y) : \overbrace{x^2 y + e^{x+y}}^{g(x,y)} = 0\}$$

Mostrare che questa espressione definisce implicitamente una funzione $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

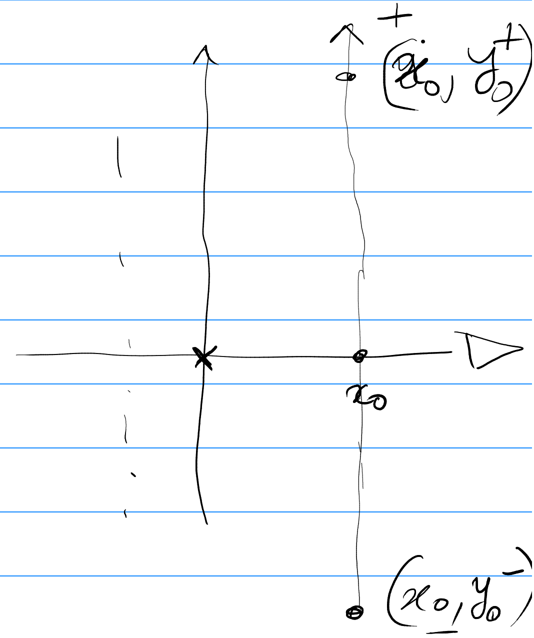
$$C = g(\varphi)$$

$$\partial_y g(x,y) = \underbrace{x^2 + e^{x+y}} > 0$$

$x_0 \neq 0$ fissato

$$\lim_{y \to +\infty} g(x_0, y) = +\infty$$

$$\lim_{y \to -\infty} g(x_0, y) = -\infty \qquad (x_0 \neq 0)$$



$\forall x_0 \neq 0 \quad \exists\ y_0^+ \ \text{t.c.}\ f(x_0, y_0^+) > 0$

$\qquad\quad\ \ \exists\ y_0^- \ \text{t.c.}\ f(x_0, y_0^-) < 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \exists!\ y_0 = y_0(x_0) : f(x_0, y_0) = 0$

$x \xmapsto{\varphi} y_0(x)$ è derivabile (per il teorema delle funzioni implicite)

(*) Mostrare che la funzione φ ha un punto critico in $x=2$; determinarne la natura.

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{\partial_x g(x, \varphi(x))}{\partial_y g(x, \varphi(x))} \quad \text{in un intorno di } x_0}$$

$\partial_x g(x,y) = 2xy + e^{x+y}$ $\qquad \partial_y g(x,y) = x^2 + e^{x+y}$

$\boxed{x^2 y + e^{x+y} = 0}$

$\partial_x g(2, \varphi(2)) = 4\varphi(2) + e^{2+\varphi(2)} = 0$ $\qquad x_0 = 2$ $\quad \varphi(2)$ soddisfa

$\boxed{4y + e^{2+y} = 0}$

$\Rightarrow$ 2 è un punto stazionario per φ

$$4\varphi(2)+e^{2+\varphi(2)}=0$$

$$\varphi'(2)=0$$

$$\varphi'(x)=-\frac{2x\varphi(x)+e^{x+\varphi(x)}}{x^2+e^{x+\varphi(x)}}$$

φ'' ?

N

$$\varphi''(x)=-\frac{\left[2\varphi(x)+2x\varphi'(x)+e^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'(x))\right](x^2+e^{x+\varphi(x)})-(2x\varphi(x)+e^{x+\varphi(x)})(2x+e^{x+\varphi(x)}(1+\varphi'))}{(x^2+e^{x+\varphi(x)})^2}$$

D

$$\varphi''(2)=-\frac{\left[(2\varphi(2)+e^{2+\varphi(2)})-\underbrace{(4\varphi(2)+e^{2+\varphi(2)})}_{0}\right]\overbrace{(4+e^{2+\varphi(2)})}}{(4+e^{2+\varphi(2)})^2}$$

$$=-\frac{\left[2\varphi(2)+e^{2+\varphi(2)}\right](4+e^{2+\varphi(2)})}{(4+e^{2+\varphi(2)})^2}$$

$$=\frac{2\varphi(2)\cancel{(4+e^{2+\varphi(2)})}}{(4+e^{2+\varphi(2)})^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{2\varphi(2)+e^{2+\varphi(2)}=-2\varphi(2)}$$

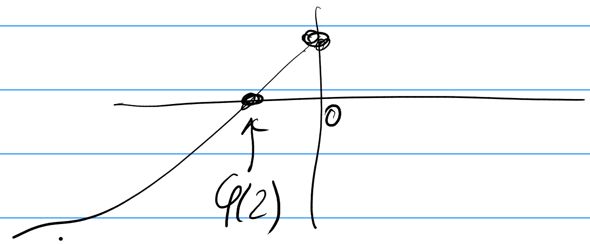
Qual è il segno di questa espressione

$\varphi(2)$ è lo zero della funzione $4y + e^{2+y} = 0$

$\Rightarrow \varphi(2) < 0$ — se $y=0$ questa espressione è >0

$\Rightarrow \varphi''(2) < 0$

$\Rightarrow 2$ max loc



ulteriori punti: $y=0$ è asintoto orizz per $x \to -\infty$

$x=0$ " " vert per $x \to 0$

$V := M_{\mathbb{R}}(n \times n)$ $\qquad \Phi : V \to \mathbb{R}$, $\quad A \mapsto \Phi(A) \doteq \det(A)$ $\qquad \dim(V) = n^2$

Mostrare che $SL_{\mathbb{R}}(n) = \{A : \Phi(A) = 1\}$ è una ipersuperficie di V

"Speciale lineare"

Basta verificare: $\forall A \in SL(n)$ $\quad D\Phi(A) : V \to \mathbb{R}$ è surgettivo

sottovarietà (n^2-1) dimensionale

ε reale piccolo

<u>Lemma</u>: $\det(I+\varepsilon H) = 1 + \varepsilon\, tr(H) + O(\varepsilon^2)$ per $\varepsilon \to 0$

(ovvero $D\Phi(I)[H] = tr(H)$)

$$[I+\varepsilon H]_{ij} = \underline{\underline{\delta_{ij} + \varepsilon h_{ij}}} = a_{ij} \quad \text{con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

h_{ij} componenti di H

$$\det(I+\varepsilon H) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma \neq id}} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

$$= (1+\varepsilon h_{11}) \cdot (1+\varepsilon h_{22}) \cdot \ldots \cdot (1+\varepsilon h_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \varepsilon\,(h_{11} + h_{22} + \dots + h_{nn}) + O(\varepsilon^2)$$

$$= 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$$