Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Foglio di esercizi n.ro 1 del 24/10/2020

1. Si considerino i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dati da

$$P_1 = [1,0,0], \quad P_2 = [0,1,0]\,, \quad P_3 = [0,0,1], \quad P_4 = [1,1,1]\ ,$$

$$Q_1 = [1,-1,-1], \quad Q_2 = [1,3,1]\,, \quad Q_3 = [1,1,-1], \quad Q_4 = [1,1,1]\ ,$$

(1) Si determini una formula esplicita per la proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ tale che $f(P_i) = Q_i$ per $i = 1,2,3,4$.
(2) Si determinino tutte le rette $s \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(s) = s$.

Soluzione. (1): I punti P_1, P_2, P_3, P_4 sono in posizione generale, e definiscono pertanto un sistema di riferimento proiettivo, una cui base normalizzata associata è $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Analogamente, un semplice conto mostra che anche Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 definiscono un sistema di riferimento proiettivo, una cui base normalizzata associata è $\{(1,-1,-1),(1,3,1),(-1,-1,1)\}$. Per il Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive, esiste allora un'unica proiettività f che verifichi le proprietà richieste, e tale f è indotta dall'applicazione lineare definita dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2): Un semplice calcolo mostra che il polinomio caratteristico di B è dato da $(2-t)^2(1-t)$. L'autospazio di B relativo all'autovalore 2 ha dimensione due, e, poste su $\mathbb{R}^3$ coordinate (x_0,x_1,x_2), ha equazione $x_0 - x_1 + x_2 = 0$. L'autospazio di B relativo all'autovalore 1 ha dimensione uno ed è generato da $v = (1,1,1)$. Ne segue che, se r è la retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione $x_0 - x_1 + x_2 = 0$ e $P = [1,1,1] = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, l'insieme dei punti fissi di f è dato da $r \cup \{P\}$.

Dimostriamo ora che tutte e sole le rette f-invarianti sono la retta r e le rette passanti per P. Che tali rette siano invarianti è facile: r è addirittura fissata puntualmente, e se s è una retta passante per P, allora $r \cap s = \{Q\}$, con $Q \neq P$, per cui $f(s) = f(L(P,Q)) = L(f(P), f(Q)) = L(P,Q) = s$.

Viceversa, sia s una retta tale che $f(s) = s$. Se $P \in s$ abbiamo finito, supponiamo perciò $P \notin s$. Sia $A \in s$. Lo spazio $L(P,A)$ è una retta (in quanto $P \neq A$) distinta da s (in quanto $P \notin s$), per cui $L(P,A) \cap s = A$. Poiché $L(P,A)$ ed s sono f-invarianti, si ha $f(A) = f(L(P,A) \cap s) = f(L(P,A)) \cap f(s) = L(P,A) \cap s = A$. Dunque A è fissato da f, ed essendo $A \neq P$ si ha necessariamente $A \in r$. Data l'arbitrarietà di A, se ne deduce $s \subseteq r$, per cui $s = r$.

2. Siano P_1, P_2, P_3 punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale, e sia $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ una retta tale che $P_i \notin r$ per $i = 1,2,3$.

(1) Si mostri che esiste un'unica proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tale che $f(P_1) = P_1$, $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$ e $f(r) = r$.
(2) Si mostri che l'insieme dei punti di fissi di f è dato dall'unione di un punto $M \in r$ ed una retta s con $M \notin s$.

Soluzione. (1) Siano $A = L(P_1, P_2) \cap r$, $B = L(P_1, P_3) \cap r$. È immediato verificare che i punti A, B, P_2, P_3 formano un sistema di riferimento proiettivo di $\mathbb{P}_2(\mathbb{K})$. Se f è una proiettività che verifica le condizioni richieste si ha $f(L(P_1, P_2)) = L(f(P_1), f(P_2)) = L(P_1, P_3)$, per cui $f(A) = f(r \cap L(P_1, P_2)) = r \cap L(P_1, P_3) = B$. Analogamente si mostra che $f(B) = A$ per cui, essendo per ipotesi $f(P_2) = P_3$ e $f(P_3) = P_2$, per il Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive se una tale f esiste è necessariamente unica. Sia dunque $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ l'unica proiettività tale che $f(P_2) = P_3$, $f(P_3) = P_2$, $f(A) = B$, $f(B) = A$. Si ha

$$f(P_1) = f(L(A, P_2) \cap L(B, P_3)) = L(B, P_3) \cap L(A, P_2) = P_1$$

e

$$f(r) = f(L(A, B)) = L(f(A), f(B)) = L(B, A) = r\ ,$$

per cui f verifica le condizioni descritte nell'enunciato.

(2) Se $M = L(P_2, P_3) \cap r$ si ha

$$f(M) = f(L(P_2, P_3)) \cap f(r) = L(P_2, P_3) \cap r = M\ .$$

Inoltre $f(L(A, P_3)) = L(B, P_2)$ e $f(L(B, P_2)) = L(A, P_3)$, per cui anche il punto $Q = L(A, P_3) \cap L(B, P_2)$ è lasciato fisso da f. Poiché $L(A, P_3) \cap r = A$, $L(B, P_2) \cap r = B$ si ha poi $Q \notin r$, ed inoltre $Q \neq P_1$ in quanto altrimenti B giacerebbe su $L(P_1, P_2)$ e P_1, P_2, P_3 sarebbero allineati. Pertanto posto $s = L(Q, P_1)$ è ben definito il punto $N = s \cap r$. Poiché Q e P_1 sono lasciati fissi da f si ha $f(s) = s$, per cui $f(N) = f(s \cap r) = s \cap r = N$. Lasciando fissi i tre punti distinti P_1, Q, N, la restrizione di f a s coincide perciò con l'identità di s.

Poiché P_2, P_3, A, B sono in posizione generale, i punti $M = L(P_2, P_3) \cap L(A, B)$, $P_1 = L(P_3, B) \cap L(P_2, A)$, $Q = L(A, P_3) \cap L(B, P_2)$ non sono allineati (cfr. Esercizio 5 di questo foglio), per cui $M \in s = L(P_1, Q)$. Il luogo dei punti fissi di f contiene pertanto la retta s ed il punto $M \in r$ che non giace su s. D'altronde, se f ammettesse altri punti fissi agirebbe come l'identità su un sistema di riferimento di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, e sarebbe perciò l'identità, contro l'ipotesi che si abbia $f(P_2) = P_3 = P_2$.

3. Siano $p \in \mathbb{N}$ un numero primo, $q = p^n$ per un qualche $n \in \mathbb{N}$, e $\mathbb{K}$ il campo finito $\mathbb{F}_q$.
(1) Dato $m \in \mathbb{N}$, si calcoli la cardinalità di $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$.
(2) Dati due punti $P, P' \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ e due rette $r, r' \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, tali che $P \notin r$ e $P' \notin r'$, si determini quante sono le proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = P'$ e $f(r) = r'$.

Soluzione. (1) Per qualsiasi $m \geq 1$ possiamo scrivere $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) = U_0 \cup H_0$, dove H_0 è l'iperpiano di equazione $x_0 = 0$ e U_0 la carta affine costituita dai punti $[x_0, \ldots, x_m]$ tali che $x_0 \neq 0$. Ricordando che ci sono bigezioni $U_0 \cong \mathbb{K}^m$ e $H_0 \cong \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ e che $H_0 \cap U_0 = \emptyset$, otteniamo

$$|\mathbb{P}^m(\mathbb{K})| = |\mathbb{K}^m| + |\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})|.$$

Visto che chiaramente si ha $|\mathbb{K}^m| = |\mathbb{K}|^m = q^m$, con una facile induzione, usando la formula precedente e $|\mathbb{P}^0(\mathbb{K})| = 1$, si ottiene $|\mathbb{P}^m(\mathbb{K})| = \sum_{i=0}^m q^i = 1 + q + \ldots + q^m$.

Soluzione alternativa: ricordiamo che $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\})/\sim$ dove $v \sim w$ se esiste $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tale che $v = \lambda w$. Visto che chiaramente le classi di equivalenza per la relazione $\sim$ hanno tutte cardinalità $|\mathbb{K}^*| = q - 1$, e $|\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\}| = q^{m+1} - 1$, abbiamo

$$|\mathbb{P}^m(\mathbb{K})| = |\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\}|/(q-1) = (q^{m+1} - 1)/(q-1),$$

che coincide con la risposta trovata nella soluzione precedente.

(2) Fissiamo arbitrariamente due punti distinti A, B in r, e un punto Q nel complementare dell'unione $r \cup L(P, A) \cup L(P, B)$. La quaterna ordinata $\{P, A, B, Q\}$ è un riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$.

Le proiettività che soddisfano le condizioni del testo sono precisamente quelle che mandano P in P', A in un punto $A' \in r'$, B in un punto $B' \in r' \setminus \{A'\}$, e Q in un punto Q' nel complementare dell'unione $r' \cup L(P', A') \cup L(P', B')$. Per il Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive, c'è una bigezione tra l'insieme delle proiettività cercate e le quaterne ordinate $\{P', A', B', Q'\}$ di punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ con le proprietà appena elencate. Basta quindi contare il numero di tali quaterne.

Il punto P' è fissato dal problema, per il punto $A' \in r'$ ci sono $|r'| = |\mathbb{P}^1(\mathbb{K})| = q + 1$ scelte, per il punto B' ce ne sono $|r' \setminus \{A'\}| = q$, e per il punto Q' ce ne sono

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus (r' \cup L(P', A') \cup L(P', B'))| &= (q^2 + q + 1) - (q + 1) - q - (q - 1) \\ &= (q-1)^2 \end{aligned}$$

dove il termine $-(q+1)$ esclude include i punti di r', il termine $-q$ quelli di $L(P', A') \setminus r'$, e il termine $-(q-1)$ quelli di $L(P', B') \setminus (r' \cup L(P', A'))$.

Dato che queste scelte sono indipendenti, ci sono esattamente $(q+1)q(q-1)^2$ proiettività con le proprietà richieste.

4. Siano r_0, r_1 le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione rispettivamente $x_0 - x_1 = 0$ e $x_1 - x_2 = 0$ (dove $[x_0, x_1, x_2]$ sono le coordinate omogenee standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$).

(1) Si mostri che esiste un'unica prospettività $f : r_0 \to r_1$ tale che

$$f([1:1:0]) = [0:1:1], \qquad f([0:0:1]) = [1:0:0].$$

(2) Si calcoli il centro O della prospettività f appena trovata.

Soluzione. (1): Sia $A = r_0 \cap r_1 = [1, 1, 1]$. Per il Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive, esiste un'unica proiettività $f : r_0 \to r_1$ tale che $f([1:1:0]) = [0:1:1]$, $f([0:0:1]) = [1:0:0]$ ed $f(A) = A$. Per quanto visto a lezione, tale proiettività, fissando $r_0 \cap r_1$, è una prospettività. L'unicità di una tale prospettività segue ancora dal Teorema fondamentale delle trasformazioni proiettive.

(2): Per definizione di prospettività, per ogni $P \in r_0$ il centro O deve essere allineato con P ed $f(P)$. Dunque

$$\begin{aligned} O &= L([1:1:0], f([1:1:0])) \cap L([0:0:1], f([0:0:1])) \\ &= L([1:1:0],[0:1:1]) \cap L([0:0:1],[1:0:0]) \\ &= \{x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \cap \{x_2 = 0\} = [1, 0, -1] \ . \end{aligned}$$

5. Siano A, B, C, D punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ in posizione generale. Si mostri che i punti

$$L(A,B) \cap L(C,D)\,, \quad L(A,C) \cap L(B,D)\,, \quad L(A,D) \cap L(B,C)$$

non sono allineati.

Soluzione. Scegliendo coordinate tali che $A = [1,0,0]$, $B = [0,1,0]$, $C = [0,0,1]$, $D = [1,1,1]$, si calcola facilmente che i tre punti descritti nell'enunciato hanno coordinate $[1,1,0]$, $[1,0,1]$, $[0,1,1]$. Mettendo in colonna le coordinate di questi tre punti si ottiene una matrice 3×3 con determinante non nullo, e da ciò segue la tesi.

6. Siano r, s rette di $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ tali che $r \cap s = \emptyset$, e sia $P \notin r \cup s$. Abbiamo visto a lezione che esiste un'unica retta $l \subseteq \mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ tale che $P \in l$, $l \cap r \neq \emptyset$ e $l \cap s \neq \emptyset$. Si determinino equazioni cartesiane per la retta l nel caso in cui la retta r abbia equazioni $2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$, la retta s abbia equazioni $x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0$, e $P = [0,1,0,1]$.

Soluzione. Abbiamo visto a lezione che $l = L(P,r) \cap L(P,s)$. Le equazioni cartesiane di l saranno perciò date dall'unione di un'equazione cartesiana per $L(P,r)$ ed un'equazione cartesiana per $L(P,s)$. Poiché r ha equazioni $2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$, se $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ non sono entrambi nulli, il piano di equazione $\lambda(2x_1 - 3x_2 + x_3) + \mu(x_0 + x_3) = 0$ contiene la retta r. Un tale piano contiene anche P se e solo se $\lambda(0 - 0 + 1) + \mu(0 + 1) = 0$, cioè se $\mu = -3\lambda$. Ponendo ad esempio $\lambda = 1$, $\mu = -3$, si ottiene l'equazione cartesiana $-3x_0 + 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$ per $L(P,r)$. Procedendo analogamente, si ottiene per $L(P,s)$ l'equazione cartesiana $-3x_0 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Le equazioni cartesiane di l sono pertanto $-3x_0 + 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3x_0 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$.

7. Sia $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ una proiettività diversa dall'identità. Si mostri che $f^2 = \mathrm{Id}$ se e solo se esistono punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tali che $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$.

Soluzione. Se f è diversa dall'identità esiste $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ tale che $f(P) \neq P$. Posto $Q = f(P)$, se $f^2 = \mathrm{Id}$ si ha allora $f(Q) = P$. Ciò prova un'implicazione.

Per quanto riguarda il viceversa siano $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^2$ rappresentanti di P e Q, rispettivamente. Poiché $P \neq Q$ i vettori v_1, v_2 sono indipendenti, e sono perciò una base di $\mathbb{K}^2$. Se $\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ è un'applicazione lineare che induce f, abbiamo allora $\varphi(v_1) = \lambda v_1$, $\varphi(v_2) = \mu v_2$ per qualche $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$. Ne segue che $\varphi^2(v_1) = \lambda\mu v_1$, $\varphi^2(v_2) = \lambda\mu v_2$, per cui φ^2 è un multiplo dell'identità, e $f^2 = \mathrm{Id}$.

8. Siano r_0, r_1, r_2 tre rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non concorrenti (cioè tali che $r_0 \cap r_1 \cap r_2 = \emptyset$).

(1) Si mostri che esistono infinite proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tali che $f(r_0) = r_1$, $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_0$.

(2) Sia f una proiettività con le proprietà descritte al punto precedente. Si mostri che $f^3 = \mathrm{Id}$.

Soluzione. Sfruttando il fatto che le tre rette non sono concorrenti si verifica facilmente che sono a due a due distinte, e che i punti $P_0 = r_1 \cap r_2$, $P_1 = r_0 \cap r_2$, $P_2 = r_0 \cap r_1$ sono in posizione generale. Possiamo dunque scegliere un punto P tale che P_0, P_1, P_2, P sia un riferimento proiettivo, e fissare coordinate omogenee indotte da tale riferimento, così che $P_0 = [1 : 0 : 0]$, $P_1 = [0 : 1 : 0]$, $P_2 = [0 : 0 : 1]$, e $P = [1 : 1 : 1]$. Per qualsiasi scelta di un punto Q in posizione generale rispetto a P_0, P_1, P_2, per il Teorema Fondamentale delle Trasformazioni Proiettive esiste una proiettività $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che $f(P_0) = P_1$, $f(P_1) = P_2$, $f(P_2) = P_0$, $f(P) = Q$. Una tale f verifica

$$f(r_0) = f(L(P_1, P_2)) = L(f(P_1), f(P_2)) = L(P_2, P_0) = r_1 \ ,$$

e analogamente $f(r_1) = r_2$, $f(r_2) = r_0$. Poiché al variare di Q si ottengono infinite possibilità per f, ciò dimostra (1).

(2): Se f permuta ciclicamente le rette r_0, r_1, r_2, allora necessariamente permuta ciclicamente i loro punti di intersezione P_0, P_1, P_2. Sia $\{v_0, v_1, v_2\}$ una base normalizzata associata a P_0, P_1, P_2, P, così che v_i sia un rappresentante di P_i per $i = 0, 1, 2$. Sia $f = [\varphi]$, dove $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare ed invertibile. Allora $\varphi(v_0) = \lambda v_1$, $\varphi(v_1) = \mu v_2$ e $\varphi(v_2) = \eta v_0$, da cui $\varphi^3 = \lambda\mu\eta \cdot \mathrm{Id}$, e $f^3 = [\varphi^3] = \mathrm{Id}$.

9. Si consideri il morfismo di anelli $\psi\colon \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[t, x_1, \ldots, x_n]$ definito da

$$\psi(f)(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) \ .$$

Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Si mostri che f è omogeneo di grado d se e solo se $\psi(f) = t^d \cdot f$. (Una freccia è ovvia; l'altra è stata utilizzata nella dimostrazione del fatto che il risultante rispetto a x_2 di polinomi omogenei in $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ è esso stesso omogeneo).

Soluzione. Il fatto che, se f è omogeneo di grado d, allora $\psi(f) = t^d \cdot f$ segue da una banale sostituzione.

Viceversa, sia $n = \deg f$, e sia $f = f_n + f_{n-1} + \ldots + f_1 + f_0$ la decomposizione di f tale che f_i sia omogeneo di grado i per ogni i. Supponiamo che si abbia

$$\psi(f) = t^d \cdot f = t^d(f_n + f_{n-1} + \ldots + f_1 + f_0) \ .$$

Una banale sostituzione mostra che si ha anche

$$\psi(f) = t^n f_n + t^{n-1} f_{n-1} + \ldots + t f_1 + f_0 \ ,$$

da cui

$$(t^n - t^d) f_n + (t^{n-1} - t^d) f_{n-1} + \ldots + (t - t^d) f_1 + (1 - t^d) f_0 = 0 \ .$$

Affinché questa uguaglianza sia vera in $\mathbb{K}[t, x_1, \ldots, x_n]$ l'unica possibilità è che si abbia $f_i = 0$ per ogni $i \neq d$, cioè che f sia omogeneo di grado d.

10. Siano $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, e sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ di grado positivo. Si mostri che $V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

Soluzione. Nella lezione del 7/10/2020 si è dimostrato che, per ogni retta proiettiva $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, si ha $r \cap V(\mathcal{C}) \neq \emptyset$. Ricordiamo ora che ogni campo algebricamente chiuso è infinito: di conseguenza, ogni retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ è infinita, e $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ stesso è infinito.
Sia allora $P \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ (tale P esiste, altrimenti $V(\mathcal{C}) = \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, ed abbiamo finito - questa eventualità è comunque impossibile, si veda l'esercizio seguente), e sia r una retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ non passante per P. Per quanto detto inizialmente, per ogni $A \in r$ esiste (almeno) un punto $Q_A \in L(P, A) \cap V(\mathcal{C})$. Poiché $P \notin V(\mathcal{C})$, inoltre, $Q_A \neq P$. Inoltre, se $A, B \in r$ sono distinti, allora $L(P, A) \cap L(P, B) = P$, per cui $Q_A \neq Q_B$. Poiché r contiene infiniti punti, ne segue che anche $V(\mathcal{C})$ è infinito.

11. Sia $\mathbb{K}$ un campo infinito, e sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che $\mathbb{P}^2(\mathbb{K}) \setminus V(\mathcal{C})$ è un insieme infinito.

Soluzione. Sia $\mathcal{C} = [f]$, dove f è un polinomio omogeneo di grado d. Abbiamo visto a lezione che, se una retta proiettiva r verifica $r \subseteq V(\mathcal{C})$, allora r (o, più precisamente, la classe di equivalenza di una sua equazione cartesiana) è una componente irriducibile di $\mathcal{C}$. Perciò, se $V(\mathcal{C})$ contenesse $d+1$ rette proiettive distinte di equazioni $g_1, \ldots, g_{d+1}$, allora avremmo $\mathcal{C} = [g_1] + [g_2] + \cdots + [g_{d+1}] + \mathcal{C}'$ per qualche curva proiettiva $\mathcal{C}'$. Ciò implicherebbe $\deg \mathcal{C} = 1 + 1 + \cdots + 1 + \deg \mathcal{C}' \geq d + 1$, il che è assurdo.
Poiché $\mathbb{K}$ è infinito, esistono infinite rette proiettive distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, perciò, per quanto visto nel paragrafo precedente, esiste una retta $r \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ non contenuta in $V(\mathcal{C})$. Nella lezione del 7/10/2020 abbiamo dimostrato che allora $V(\mathcal{C})$ interseca r al più in d punti. Poiché r è un insieme infinito, ne segue che $r \setminus V(\mathcal{C})$ è infinito, da cui la tesi.

12. Sia $\mathcal{C}$ una conica non degenere di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avente equazione ${}^t x A x = 0$, dove A è una matrice simmetrica 3×3 a coefficienti in $\mathbb{C}$ e $x = {}^t(x_0, x_1, x_2)$. Per ogni $P = [v] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, indichiamo con $\mathrm{pol}(P)$ la retta di equazione ${}^t v A x = 0$. Inoltre, per ogni $Q \in V(\mathcal{C})$ indichiamo con τ_Q la tangente a $\mathcal{C}$ in Q.

(1) Si mostri che, se $P \in V(\mathcal{C})$, allora $\mathrm{pol}(P) = \tau_P$.
(2) Si mostri che, se $P \notin V(\mathcal{C})$, allora

$$\mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C}) = \{Q \in V(\mathcal{C}) \mid P \in \tau_Q\} \ .$$

Soluzione. (1): Sia $f(x) = {}^t x A x$ l'equazione di $\mathcal{C}$, e sia $P = [v]$ un punto di $V(\mathcal{C})$. Si ha allora ${}^t v A v = 0$. Inoltre, se $Q = [w]$ è un punto del piano proiettivo distinto da P, la retta $r = L(P, Q)$ ammette la parametrizzazione $[\lambda, \mu] \mapsto [\lambda v + \mu w]$. La molteplicità di intersezione $I(\mathcal{C}, r, P)$ è data dalla molteplicità di $[1, 0]$ come radice del polinomio $f(\lambda v + \mu w)$, cioè dalla molteplicità di 0 come radice del polinomio

$$f(v + \mu w) = {}^t(v + \mu w) A (v + \mu w) = {}^t v A v + (2\mu) {}^t v A w + (\mu^2) {}^t w A w \ .$$

Ricordando che ${}^t vAv = 0$, otteniamo

$$f(v + \mu w) = \mu(2\,{}^t vAw + \mu\,{}^t wAw) \ ,$$

per cui la retta r è tangente a $\mathcal{C}$ in P se e solo se ${}^t vAw = 0$, cioè se $Q = [w] \in \mathrm{pol}(P)$. Ciò significa esattamente che $\mathrm{pol}(P) = \tau_P$.

(2): Si osservi che, poiché A è simmetrica, per ogni coppia di punti P_1, P_2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ si ha $P_1 \in \mathrm{pol}(P_2)$ se e solo se $P_2 \in \mathrm{pol}(P_1)$ (tale fatto viene talora chiamato relazione di reciprocità).

Sia $P \notin V(\mathcal{C})$. Se $Q \in \mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})$, allora per quanto appena detto $P \in \mathrm{pol}(Q) = \tau_Q$, dove l'ultima uguaglianza è stata dimostrata al punto (1). Dunque

$$\mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C}) \ \subseteq \ \{Q \in V(\mathcal{C}) \,|\, P \in \tau_Q\} \ .$$

Viceversa, se Q è un punto di $V(\mathcal{C})$ tale che $P \in \tau_Q = \mathrm{pol}(Q)$, allora per reciprocità $Q \in \mathrm{pol}(P)$, da cui

$$\{Q \in V(\mathcal{C}) \,|\, P \in \tau_Q\} \ \subseteq \ \mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})\,,$$

come voluto.

È peraltro possibile dimostrare (cosa non richiesta dal testo), che per ogni $P \notin V(\mathcal{C})$ l'insieme $V(\mathcal{C}) \cap \mathrm{pol}(C)$ consiste esattamente di due punti: pertanto, da ogni punto esterno a $\mathcal{C}$ è possibile condurre esattamente due tangenti a $\mathcal{C}$. Infatti, poiché $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso, l'insieme $\mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})$ consiste di un punto o di due punti (poiché $\mathcal{C}$ è non degenere, è irriducibile, e il suo supporto non può perciò contenere $\mathrm{pol}(P)$). Tuttavia, se $\mathrm{pol}(P) \cap V(\mathcal{C})$ consistesse di un solo punto Q, la molteplicità di interesezione $I(\mathcal{C}, r, Q)$ dovrebbe essere uguale a 2 (ciò discende dal fatto che un polinomio di grado due in una variabile avente esattamente una radice, ha tale radice come radice doppia). In altre parole, $\mathrm{pol}(P)$ dovrebbe essere tangente a $\mathcal{C}$ in Q, e duque, per quanto visto in (1), dovremmo perciò avere $\mathrm{pol}(P) = \mathrm{pol}(Q)$, da cui $P = Q$ (poiché A è invertibile, le equazioni ${}^t vAx = 0$ e ${}^t v'Ax = 0$ definiscono la stessa retta se e solo se $[v] = [v']$), il che è assurdo.

13. Siano $P_1, \ldots, P_5$ cinque punti in posizione generale in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$. Si mostri che esiste un'unica conica proiettiva $\mathcal{C}$ tale che $V(\mathcal{C})$ contiene tutti i punti $P_1, \ldots, P_5$, e che tale conica è non-degenere. Cosa succede se i punti non sono in posizione generale?
(*Suggerimento*: fissate un riferimento proiettivo appropriato, e cercate l'equazione della conica usando le coordinate omogenee indotte da questo riferimento.)

Soluzione. Lavoriamo nelle coordinate omogenee determinate dal riferimento proiettivo $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$. In queste coordinate,

$$P_1 = [1, 0, 0], P_2 = [0, 1, 0], P_3 = [0, 0, 1], P_4 = [1, 1, 1]$$

e fissiamo coordinate per $P_5 = [a, b, c]$ con $a, b, c \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

Inoltre sappiamo che P_5 non giace su nessuna delle rette passanti per due dei punti P_1, P_2, P_3, P_4. Questa condizione è equivalente a

$$abc(a - b)(a - c)(b - c) \neq 0. \tag{1}$$

Infatti, la retta passante per P_i e P_j con $i \neq j$ e $1 \leq i, j \leq 3$ ha equazione $x_k = 0$, dove $k \in \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$, e la retta passante per P_i e P_4 con $1 \leq i \leq 3$ ha equazione $x_j - x_k = 0$, dove j, k sono i due elementi distinti di $1, 2, 3 \setminus \{i\}$. Il fatto che P_5 non stia su nessuna di queste rette è equivalente alla condizione (1).

Ora consideriamo l'equazione della conica generica

$$Ax_0^2 + Bx_1^2 + Cx_2^2 + Dx_0x_1 + Ex_0x_2 + Fx_1x_2 = 0.$$

Imponendo il passaggio per P_i con $1 \leq i \leq 3$ si ottiene $A = B = C = 0$, e il passaggio per P_4 impone $D + E + F = 0$. Infine, il passaggio per P_5 equivale a

$$Dab + Eac + Fbc = 0$$

da cui, usando $D + E + F = 0$, segue che (a meno di una costante moltiplicativa non nulla, che non cambia l'equazione della conica) si ha

$$D = c(a - b),\ E = b(c - a),\ F = a(b - c).$$

C'è quindi esattamente una conica che passa per $P_1, \ldots, P_5$, e ha equazione

$$c(a - b)x_0x_1 + b(c - a)x_0x_2 + a(b - c)x_1x_2 = 0$$

(si noti che l'equazione è non banale, anzi tutti i coefficienti sono non nulli, grazie alle condizioni su a, b, c trovate in precedenza).

Per verificare che la conica trovata è non degenere basta calcolare il determinante della matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{c(a-b)}{2} & \frac{b(c-a)}{2} \\ \frac{c(a-b)}{2} & 0 & \frac{a(b-c)}{2} \\ \frac{b(c-a)}{2} & \frac{a(b-c)}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

(come sempre quando si parla di coniche supponiamo che $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$), che a meno di una costante non nulla risulta essere $abc(a - b)(a - c)(b - c)$, che è non nullo per quanto visto in precedenza.

(Alternativamente, se per assurdo la conica trovata fosse degenere, per quanto visto a lezione sarebbe riducibile, quindi il suo supporto sarebbe l'unione di due rette. Questo però non è possibile, dato che implicherebbe che almeno tre dei punti $P_1, \ldots, P_5$ sono allineati.)

Se i punti non sono in posizione generale, ci sono sempre coniche degeneri che passano per $P_1, \ldots, P_5$. Se ad esempio P_1, P_2, P_3 sono allineati su una retta r, la conica $r + L(P_4, P_5)$ è una di queste (e se P_4 e P_5 non stanno su r, questa conica è effettivamente è l'unica che passa per i punti dati). Si può osservare però che non c'è nessuna conica non degenere che passa per $P_1, \ldots, P_5$. Infatti, supponiamo che $\mathcal{C}$ sia una conica passante per $P_1, \ldots, P_5$ e sia r una retta che contiene almeno tre dei punti $P_1, \ldots, P_5$. L'insieme $V(\mathcal{C}) \cap r$ è allora costituito da almeno tre punti. Usando il Teorema di Bézout questo implica che r è una componente di $\mathcal{C}$, che quindi è degenere.

14. (Teorema di Pappo) Sia $\mathbb{P}(V)$ un piano proiettivo e siano $A_1, \ldots, A_6$ punti distinti tali che le rette $L(A_1, A_2), L(A_2, A_3), \ldots, L(A_6, A_1)$ siano distinte. Si consideri l'esagono di $\mathbb{P}(V)$ di vertici $A_1, \ldots, A_6$, e si supponga che esistano due rette distinte r e s tali che $A_1, A_3, A_5 \in r$, $A_2, A_4, A_6 \in s$ e che $O = r \cap s$ sia distinto dagli A_i. Si dimostri che i punti di intersezione dei lati opposti dell'esagono, cioè $P_1 = L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5)$, $P_2 = L(A_2, A_3) \cap L(A_5, A_6)$ e $P_3 = L(A_3, A_4) \cap L(A_6, A_1)$, sono allineati.

Soluzione. Per ipotesi $r = L(A_1, A_3)$ e $s = L(A_2, A_4)$. Poiché r e s sono distinte e il punto $O = r \cap s$ non è un vertice dell'esagono, i punti A_1, A_2, A_3, A_4 sono un riferimento proiettivo. Nel corrispondente sistema di coordinate omogenee di $\mathbb{P}(V)$ la retta r ha equazione $x_1 = 0$, la retta s ha equazione $x_0 - x_2 = 0$ e il punto O ha coordinate $[1, 0, 1]$. Il punto A_5 sta sulla retta r ed è distinto da O, da A_1 e da A_2, quindi ha coordinate $[1, 0, a]$, dove $a \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Analogamente, il punto A_6 ha coordinate $[1, b, 1]$, con $b \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. La retta $L(A_1, A_2)$ ha equazione $x_2 = 0$ e la retta $L(A_4, A_5)$ ha equazione $ax_0 + (1 - a)x_1 - x_2 = 0$, quindi il punto $P_1 = L(A_1, A_2) \cap L(A_4, A_5)$ ha coordinate $[a - 1, a, 0]$. Allo stesso modo si verifica che P_2 ha coordinate $[0, b, 1 - a]$ e P_3 ha coordinate $[b, b, 1]$. I punti P_1, P_2 e P_3 sono allineati, dato che

$$\det \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 \\ 0 & b & 1-a \\ b & b & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

15. Sia $\mathcal{C}$ una curva proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(1) Si mostri che, se $\mathcal{C}$ è irriducibile, allora ha un numero finito di punti singolari.
(2) Si mostri che $\mathcal{C}$ è ridotta se e solo se ha un numero finito di punti singolari.

Soluzione. (1) Notiamo preliminariamente che se $\mathcal{C}$ ha grado 1, cioè è una retta, allora non ha nessun punto singolare. Supponiamo dunque che $\mathcal{C}$ abbia grado $d \geq 2$, e sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un'equazione di C. Visto che $F \neq 0$ (e visto che siamo in caratteristica 0), dalla formula di Eulero segue che $F_{x_i} \neq 0$ per almeno un $i \in \{0, 1, 2\}$. Inoltre il polinomio $F_{x_i} = 0$ è omogeneo, di grado $d - 1 \geq 1$.

Sia $\mathcal{D}$ la curva di equazione $F_{x_i} = 0$. Allora i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono (in particolare) contenuti nell'intersezione $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$. Se per assurdo $\mathcal{C}$ avesse un numero infinito di punti singolari, allora l'intesezione $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$ avrebbe infiniti punti. Per il Teorema di Bézout seguirebbe che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ avrebbero una componente irriducibile in comune. Essendo $\mathcal{C}$ irriducibile, questa componente irriducibile dovrebbe essere necessariamente $\mathcal{C}$ stessa. Ora basta notare che $\mathcal{C}$ non può essere componente irriducibile di $\mathcal{D}$, visto che $\mathcal{D}$ ha grado strettamente minore di quello di $\mathcal{C}$. Questo mostra che $V(\mathcal{C}) \cap V(\mathcal{D})$ ha un numero finito di punti, e quindi anche i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono in numero finito.

(2) Mostriamo prima che se $\mathcal{C}$ non è ridotta, allora ha infiniti punti singolari.

Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un'equazione di $\mathcal{C}$, e supponiamo $F = G^2 \cdot H$ dove $G \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ è omogeneo, di grado $d \geq 1$. Sia $\mathcal{D}$ la curva proiettiva di equazione $G = 0$. Per l'Esercizio 10, l'insieme $V(\mathcal{D})$ è infinito. Mostriamo che ogni $P \in V(\mathcal{D}) \subseteq V(\mathcal{C})$ è punto singolare di $\mathcal{C}$.

Per questo basta mostrare che per ogni $i \in \{0, 1, 2\}$ si ha $F_{x_i}(P) = 0$. Ma infatti, derivando $F = G^2 \cdot H$ rispetto alla variabile x_i, otteniamo

$$F_{x_i} = 2G \cdot G_{x_i} \cdot H + G^2 \cdot H_{x_i},$$

e dunque

$$F_{x_i}(P) = 2G(P)G_{x_i}(P)H(P)+G(P)^2H_{x_i}(P) = G(P)\Big(2G_{x_i}(P)H(P)+G(P)H_{x_i}(P)\Big) = 0,$$

dato che $G(P) = 0$ (in quanto $P \in V(\mathcal{D})$). (In alternativa, si può notare che, come visto a lezione il giorno 15/10/2020, poiché $\mathcal{C} = \mathcal{D}+\mathcal{D}+\mathcal{C}'$, dove $\mathcal{C}' = [H]$, per ogni $P \in V(\mathcal{D})$ si ha $m_P(\mathcal{C}) = m_p(\mathcal{D}) + m_p(\mathcal{D}) + m_p(\mathcal{C}') \geq 1 + 1 + m_p(\mathcal{C}') \geq 2$, per cui P è singolare per $\mathcal{C}$).

Viceversa, mostriamo che se $\mathcal{C}$ è ridotta, allora ha un numero finito di punti singolari. Sia $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ un'equazione di $\mathcal{C}$, e scriviamo $F = \prod_{i=1}^k F_i$, dove $F_i \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ sono omogenei, irriducibili, di grado positivo e a due a due coprimi. Sia $\mathcal{C}_i$ la curva proiettiva di equazione $F_i = 0$, cosicché $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k$.

Nella lezione del 15/10/2020 si è visto che un punto P è singolare per $\mathcal{D} + \mathcal{D}'$ se e solo se è singolare per $\mathcal{D}$, oppure è singolare per $\mathcal{D}'$, oppure sta in $V(\mathcal{D}) \cap V(\mathcal{D}')$. Una facile induzione mostra quindi che, con la notazione stabilita sopra, P è singolare per $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \cdots + \mathcal{C}_k$ se e solo se è singolare per una delle componenti $\mathcal{C}_i$, oppure sta in una delle intersezioni $V(\mathcal{C}_i) \cap V(\mathcal{C}_j)$ con $i \neq j$. Ora, per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$ i punti singolari di $\mathcal{C}_i$ sono in numero finito grazie al punto (1) del presente esercizio, e visto che le curve $\mathcal{C}_i$ sono irriducibili e i polinomi F_i sono a due a due coprimi, dal Teorema di Bézout segue che tutte le intersezioni $V(\mathcal{C}_i) \cap V(\mathcal{C}_j)$ per $i \neq j$ sono finite. Per quanto detto, concludiamo che $\mathcal{C}$ ha un numero finito di punti singolari.

16. Si mostri che una cubica proiettiva con due punti singolari distinti è necessariamente riducibile.

Soluzione. Supponiamo che $P_1, P_2 \in V(\mathcal{C})$ siano punti singolari. Allora per definizione di punto singolare abbiamo $m_{P_i}(\mathcal{C}) \geq 2$ per $i = 1, 2$. Inoltre, per definizione di molteplicità di un punto in una curva, se r è la retta $L(P_1, P_2)$ abbiamo $I(\mathcal{C}, r, P_i) \geq m_{P_i}(\mathcal{C}) \geq 2$ per $i = 1, 2$.

Ora, se r non fosse componente di $\mathcal{C}$, avremmo $\sum_{P \in V(\mathcal{C}) \cap r} I(\mathcal{C}, r, P) \leq 3$. Ma questa somma è almeno $I(\mathcal{C}, r, P_1) + I(\mathcal{C}, r, P_2) \geq 2 + 2 = 4$ per quanto visto. Dunque r deve essere una componente di $\mathcal{C}$, che quindi è riducibile.

17. Sia $\mathcal{C}$ la curva proiettiva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definita dall'equazione

$$x_0x_2^2 - x_1^3 + x_0x_1^2 + 5x_0^2x_1 - 5x_0^3\ .$$

(1) Si mostri che $\mathcal{C}$ è liscia.
(2) Si determinino i punti $P \in V(\mathcal{C})$ per cui la tangente a $\mathcal{C}$ in P passi per il punto $Q = [0, 1, 0]$.

Soluzione. (1) Supponiamo che (x_0, x_1, x_2) risolva il sistema

$$\begin{cases} F_{x_0} = x_2^2 + x_1^2 + 10x_0x_1 - 15x_0^2 = 0 \\ F_{x_1} = (x_0+x_1)(5x_0 - 3x_1) = 0 \\ F_{x_2} = 2x_0x_2 = 0 \end{cases}$$

Da $F_{x_2} = 0$ si deduce che $x_0 = 0$ o $x_2 = 0$. Nel primo caso, da $F_{x_1} = 0$ si deduce $x_1 = 0$, per cui $F_{x_0} = 0$ permette di concludere che anche $x_2 = 0$. Nel secondo caso, da $F_{x_1} = 0$ si deduce $x_0 = -x_1$ oppure $x_1 = (5/3)x_0$. Insieme alla condizione $x_2 = 0$, ciascuna di queste uguaglianze, se sostituita in $F_{x_0} = 0$, implica $x_0 = x_1 = 0$. In ogni caso abbiamo mostrato $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, per cui $\mathcal{C}$ è non singolare.

(2) La tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $[y_0, y_1, y_2]$ ha equazione

$$F_{x_0}(y_0,y_1,y_2)x_0 + F_{x_1}(y_0,y_1,y_2)x_1 + F_{x_2}(y_0,y_1,y_2)x_2 = 0,$$

e pertanto contiene Q se e solo se $F_{x_1}(y_0, y_1, y_2) = 0$. Ne segue che tutti e soli i punti di $V(\mathcal{C})$ la cui tangente contiene Q sono determinati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(y_0,y_1,y_2) = y_0y_2^2 - y_1^3 + y_0y_1^2 + 5y_0^2y_1 - 5y_0^3 = 0 \\ F_{x_1}(y_0,y_1,y_2) = (y_0+y_1)(5y_0 - 3y_1) = 0 \end{cases}$$

che è soddisfatto dai punti di coordinate $[0,0,1], [1,-1,2\sqrt{2}], [1,-1,-2\sqrt{2}], [3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, 2i\sqrt{10}], [3\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, -2i\sqrt{10}]$.

18. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $\mathbb{C}^2$ di equazione $f(x,y) = xy^2 - y^4 + x^3 - 2x^2y = 0$. Si determinino:

(1) I punti impropri e gli asintoti di $\mathcal{C}$.
(2) I punti singolari di $\mathcal{C}$, con le loro molteplicità e le loro tangenti principali.
(3) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(4, -4)$.

Soluzione. (1) Identificando $\mathbb{C}^2$ con la carta affine U_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ attraverso la mappa $j_0 : \mathbb{C}^2 \to U_0$ definita da $j_0(x_1, x_2) = [1, x_1, x_2]$, la chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ ha equazione

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0x_1x_2^2 - x_2^4 + x_0x_1^3 - 2x_0x_1^2x_2 = 0$$

Calcolando l'intersezione fra $\mathcal{C}$ e la retta $x_0 = 0$, troviamo come unico punto improprio $P = [0, 1, 0]$.

Usando le coordinate affini $u = x_0/x_1$, $v = x_2/x_1$ nella carta affine U_1, il punto P ha coordinate $(0, 0)$ e la parte affine $\overline{\mathcal{C}} \cap U_1$ ha equazione $uv^2 - v^4 + u - 2uv = 0$. Pertanto P è un punto semplice di $\overline{\mathcal{C}}$ e la tangente a $\overline{\mathcal{C}} \cap U_1$ in P ha equazione $u = 0$. Dunque la tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in P è la retta $x_0 = 0$, e di conseguenza non ci sono asintoti per $\mathcal{C}$.

(2) Ricordiamo che i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono i punti propri che sono singolari per $\overline{\mathcal{C}}$. Per determinare i punti singolari di $\overline{\mathcal{C}}$, basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} F_{x_0} = x_1x_2^2 + x_1^3 - 2x_1^2x_2 = x_1(x_2 - x_1)^2 = 0 \\ F_{x_1} = x_0x_2^2 + 3x_0x_1^2 - 4x_0x_1x_2 = 0 \\ F_{x_2} = 2x_0x_1x_2 - 4x_2^3 - 2x_0x_1^2 = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione il punto $Q = [1, 0, 0]$, che corrisponde a $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Dall'equazione di $\mathcal{C}$ riconosciamo che $(0, 0)$ è un punto triplo; poiché la parte omogenea di grado 3 di $f(x,y)$ è $xy^2 + x^3 - 2x^2y = x(x-y)^2$, vediamo che le tangenti principali a $\mathcal{C}$ nell'origine sono le rette $x = 0$ e $x - y = 0$ (quest'ultima con molteplicità 2).

(3) Poiché $F_{x_0}(1,4,-4) = 256$, $F_{x_1}(1,4,-4) = 128$, $F_{x_2}(1,4,-4) = 192$, l'equazione della retta proiettiva tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in $[1,4,-4]$ è $4x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0$. Ne segue che la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $(4,-4)$ ha equazione $2x + 3y + 4 = 0$.

19. Sia $\mathcal{C}$ la curva di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di equazione

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^2x_1^2 - x_0x_1x_2^2 - 3x_1^4 - x_0^2x_2^2 - 2x_0x_1^3 = 0$$

(1) Si mostri che $\mathcal{C}$ ha 4 punti singolari, e si osservi che tre di essi sono allineati.
(2) Si dica se $\mathcal{C}$ sia irriducibile.

Soluzione. (1) I punti singolari di $\mathcal{C}$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F_{x_0} = 2x_0x_1^2 - x_1x_2^2 - 2x_0x_2^2 - 2x_1^3 = 0 \\ F_{x_1} = 2x_0^2x_1 - x_0x_2^2 - 12x_1^3 - 6x_0x_1^2 = 0 \\ F_{x_2} = -2x_0x_2(x_0+x_1) = 0 \end{cases}$$

Con facili calcoli si ottiene che i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono $P = [0,0,1]$, $Q = [1,0,0]$, $R = [1,-1,2]$ e $S = [1,-1,-2]$. Notiamo che P, R e S giacciono sulla retta r di equazione $x_0 + x_1 = 0$.

(2) Si ha perciò $I(C,r,P) + I(C,r,R) + I(C,r,S) \geq 2+2+2 = 6 > 4$, per cui la retta r è una componente irriducibile di C. In effetti, se $G(x_0,x_1,x_2) = x_0x_1^2 - 3x_1^3 - x_0x_2^2$, si ha $F(x_0,x_1,x_2) = (x_0+x_1)G(x_0,x_1,x_2)$, e quindi $\mathcal{C}$ è riducibile.