Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 1)

Esercizio 1

Sia f la funzione da $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$ definita da:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

- Trovare i punti critici di f e specificarne la natura.
- Determinare estremo inferiore e superiore di f su $\mathbb{R}^2$ e stabilire se si tratta rispettivamente di minimo e massimo assoluti.
- Studiare gli insiemi di livello di f. In particolare:
  - provare che tutti gli insiemi di livello sono compatti;
  - studiarne la regolarità.
- Posto $A_c := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\big\}$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, studiare il problema di massimo vincolato:

  $$\max\{x + y | (x, y) \in A_c\}$$

  al variare di $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2

Sia M la curva definita da:

$$M := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x + y + z = 1\Big\}.$$

Denotata con ψ la funzione distanza dall'origine, risolvere i seguenti problemi di ottimizzazione mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\max_M \psi, \qquad \min_M \psi.$$

Esercizio 3

Studiare la continuità e la differenziabilità delle seguenti funzioni reali definite su $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)} & \text{se } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$