ANALISI 2 - LEZIONE 9

NOVAGA

28/10/2020

SPAZIO TANGENTE

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ K-VARIETÀ DIFF.

[CIOÈ DATO $x_0 \in M$ $\exists U$ INT. E

$\varphi : B_r(0) \to U$ DIFFEOMORFISMO

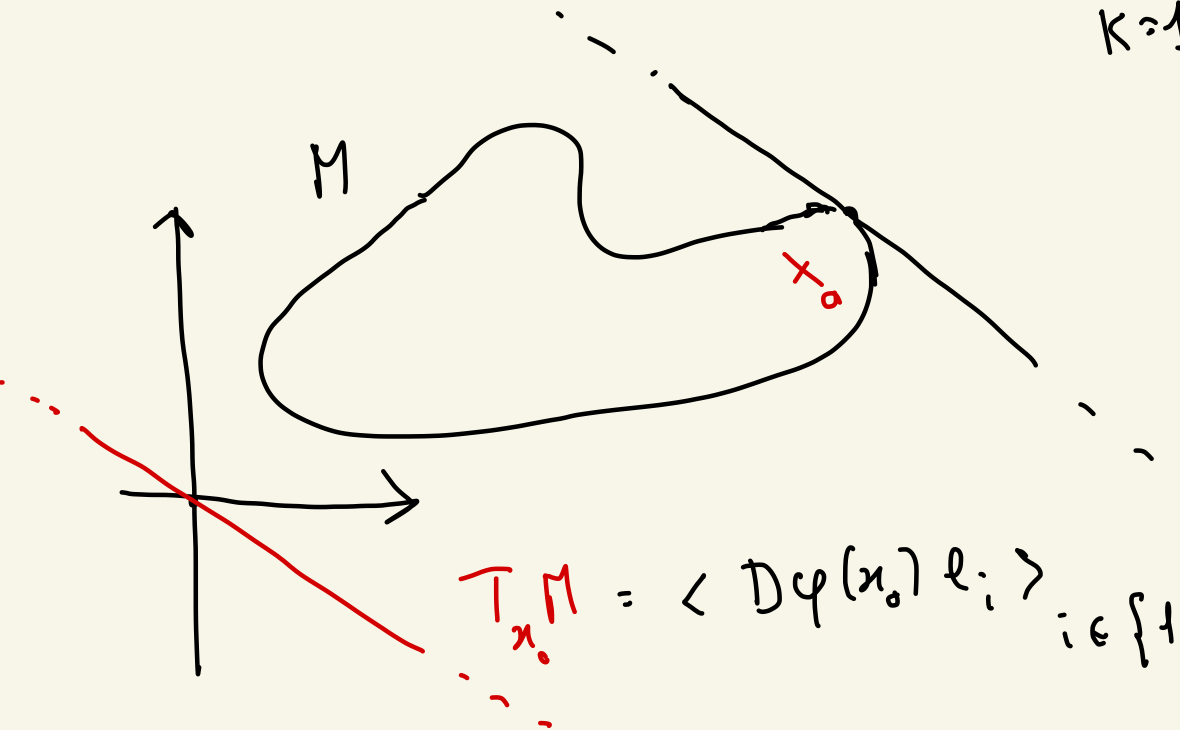
$\varphi(0) = x_0$ E $\varphi\left(\left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) \cap B_r(0)\right) = M \cap U$]

LO SPAZIO VETTORIALE

$D\varphi(x_0)\left(\mathbb{R}^k \times \{0\}\right) = T_{x_0}M < \mathbb{R}^n$, $\dim\left(T_{x_0}M\right) = k$,

SI DICE SPAZIO TANGENTE A M IN x_0

$k = 1$, $n = 2$,



$$T_{x_0}M = \langle D\varphi(x_0)\, e_i \rangle_{i \in \{1..k\}}$$

ES: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in C^1$

$\Gamma_g \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ n-VAR. DIFF.

$\varphi(x, y) = \left(x, g(x) + y\right)$ $\qquad y_0 = g(x_0)$

$D\varphi(x_0, y_0)(v, 0) = \left(v, \nabla g(x_0) \cdot v\right)$

$T_{(x_0, y_0)} \Gamma_g = \left\{ \left(v, \nabla g(x_0) \cdot v\right) : v \in \mathbb{R}^n \right\} < \mathbb{R}^{n+m}$

OSS: $f : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$

$D_y f(x_0, y_0)$ INVERT.

$\Rightarrow M = \{ (x,y) : f(x,y) = f(x_0, y_0) \}$

È UNA VARIETÀ DIFF. IN UN INT. DI (x_0, y_0)

$M = \Gamma_g$ IN UN INTORNO $\quad g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

E SI HA $\quad D_x f + D_y f \, D g = 0$

[DAL TEO DELLE FUNZIONI IMPLICITE]

OSSERVIANO CHE

$$T_{(x_0,y_0)}M = \{(v, Dg(x_0)\cdot v) : v \in \mathbb{R}^n\}$$

SOTT. DI DIM. n

$$Im\,(Df(x_0,y_0)) = T_{(x_0,y_0)}M^{\perp}$$

SOTT. DI DIMENSIONE m

È LO SPAZIO NORMALE A M IN (x_0,y_0)

INFATTI

$$(D_x f, D_y f)(v, Dg\cdot v) = D_x f\, v + D_y f\, Dg\, v = 0$$

$\mathrm{Im}(Df) = \langle \nabla f_1, \dots \nabla f_m \rangle$ È ORTOG. A TM

$f = (f_1 \dots f_m)$, $\quad TM = \{ (v, Dg\, v) : v \in \mathbb{R}^n \}$

$w \in \mathrm{Im}(Df) \qquad w = \sum \lambda_i \nabla f_i$

VOGLIO VEDERE $\langle w, (v, Dg\, v) \rangle_{\mathbb{R}^{n+m}} = 0$

$$\sum_i \lambda_i \langle \nabla f_i, (v, Dg\, v) \rangle = \langle \underbrace{D_x f\, v + D_y f\, Dg\, v}_{= 0}, \lambda \rangle_{\mathbb{R}^m}$$

DOVE $\quad \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)$

CONCLUSIONE:

$\mathrm{Im}\left(Df(x_0,y_0)\right)$ È LO SPAZIO NORMALE ALL'INSIEME DI LIVELLO $M = \{f = f(x_0,y_0)\}$ IN TUTTI I PUNTI (x_0,y_0) REGOLARI, CIOÈ T.C. $Df(x_0,y_0)$ HA RANGO MASSIMO.

TALVOLTA È UTILE STUDIARE

UN FUNZIONE $f\big|_M$, $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

E $M \subseteq \mathbb{R}^n$ SOTTOVARIETÀ.

1. $M = \operatorname{Im} \varphi$, È EQUIVALENTE

   A STUDIARE $f \circ \varphi$

2. $M = \{g = c\}$ INSIEME DI LIVELLO DI g

TEO (MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $f_0 : A \to \mathbb{R}$, $f_0 \in C^1(A)$

$f = (f_1 \dots f_m) \in C^1(A, \mathbb{R}^m)$ → SONO I VINCOLI

$M = \{ x \in A : f(x) = 0 \}$ PUÒ ESSERE $v \in \mathbb{R}^m$

SIA $x_0 \in M$ DI MASSIMO O MIN. LOCALE

PER $f_0 \Rightarrow$ I VETTORI $\{ \nabla f_i (x_0) \}_{i \in \{0, \dots m\}}$

SONO LIN. DIPENDENTI, CIOÈ

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \nabla f_i (x_0) = 0 \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

OSS: SE $rk(Df(x_0)) = m$,

CIOÈ $\{\nabla f_i(x_0)\}_{i\in\{1,..m\}}$ SONO INDIPENDENTI,

POSSO SCRIVERE

$$\nabla f_0(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla f_i(x_0) \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

IN QUESTO CASO M È REGOLARE VICINO A x_0

E $\nabla f_0(x_0) \in T_{x_0}M^{\perp}$ (SPAZIO NORMALE A M)

OSS: QUESTA È SOLO UNA CONDIZIONE NECESSARIA

(LE COND. SUFF. SONO DEL SECONDO ORDINE, PIÙ COMPLICATE DA SCRIVERE)

IL SISTEMA

$$\begin{cases} f_1(x_0) = 0 \\ \vdots \\ f_m(x_0) = 0 \\ \nabla f_0(x_0) = \sum \lambda_i \nabla f_i(x_0) \end{cases}$$

(n+m EQUAZIONI IN n+m INCOGNITE $(x_0, \lambda_1 \dots \lambda_m)$)

SI DICE SISTEMA DEI MOLT. DI LAGRANGE

DIM: SUPP. x_0 DI MIN. LOCALE PER $f_0|_M$,
CIOÈ $\exists B = B_r(x_0)$ T.C.
$f_0(x_0) \leq f_0(x) \quad \forall x \in \overline{B} \cap M$.

DATO $K \in \mathbb{N}$ SIA $g_K(x) = f_0(x) + |x - x_0|^2 + K \sum_{i=1}^{m} f_i(x)^2$

$g_K \geq f_0 \quad \forall K$ E $g_K(x_0) = f_0(x_0)$

SIA x_K UN MINIMO DI g_K IN $\overline{B}$ ($\exists$ PER WEIER)

OSSERVIAMO CHE $g_K(x_K)$ È LIMITATA $\Rightarrow$

A MENO DI SOTTOSUCC. $x_K \to x^* \in \overline{B}$ E
$g_K(x_K) \to c \in \mathbb{R}$

VOGLIO MOSTRARE $x^* = x_0$. INFATTI

$$K \sum_{i=1}^{m} f_i(x_k)^2 = g_k(x_k) - |x - x_0|^2 - f_0(x_k)$$

$$\xrightarrow[k \to \infty]{} c - |x^* - x_0|^2 - f_0(x^*) \in \mathbb{R}$$

DIVIDENDO PER K SI HA

$$\sum_i f_i(x_k)^2 \to 0 \ , \quad \text{CIOÈ} \quad f_i(x^*) = 0 \ \forall i,$$

QUINDI $x^* \in M$

ABBIAMO ANCHE, DALLA DEF. DI g_k,

$$f_0(x_k) + |x_k - x_0|^2 \leq g_k(x_k) \leq g_k(x_0) = f_0(x_0)$$

$$\big\downarrow k$$

$$f_0(x^*) + |x^* - x_0|^2 \leq f_0(x^*)$$

QUINDI $|x^* - x_0|^2 = 0$ CIOÈ $\boxed{x_k \xrightarrow[k]{} x_0}$.

PER FERMAT, CHE POSSIAMO APPLICARE PER K GRANDE,

$$0 = \nabla g_k(x_k) = \nabla f_0(x_k) + 2(x_k - x_0)$$
$$+ 2K \sum f_i(x_k) \nabla f_i(x_k)$$

PONENDO

$$\mu_{i,k} = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 2K f_i(x_k) & i \in \{1, \dots m\} \end{cases}$$

POSSO SCRIVERE

$$\sum_{i=0}^{m} \mu_{i,k} \nabla f_i(x_k) = -2(x_k - x_0) \xrightarrow[k]{} 0$$

NORMALIZZO $\tilde{\mu}_{i,k} = \dfrac{\mu_{i,k}}{\sqrt{\sum \mu_{i,k}^2}}$ ED HO, PER CPT,

$$\tilde{\mu}_{i,k} \xrightarrow[k]{} \mu_i^* \quad \text{CON} \quad \sum_i \mu_i^{*2} = \lim_k \sum \tilde{\mu}_{i,k}^2 = 1.$$

PASSANDO AL LIMITE IN

$$\sum_{i=0}^{m} \tilde{\mu}_{i,k} \nabla f_i(x_k) \to \sum_{i=0}^{m} \mu_i^* \nabla f_i(x_0)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad \|$$

$$-\,2\,(x_k - x_0) \Big/ \sqrt{\textstyle\sum_i \mu_{i,k}^2} \xrightarrow[k]{} 0$$

OSS: $\sum_i \mu_{i,k}^2 \geq \mu_{0,k}^2 = 1$, MA POTREBBE TENDERE A $+\infty$ PER $k \to \infty$.