$\dim V = n^2$

6 nov 2020 $\qquad V = \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n) \qquad H = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$

Riassunto

LEMMA: $\det(I+\varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$ per $\varepsilon \to 0$ $\qquad \boxed{\operatorname{tr} H \doteq \sum_i h_{ii}}$

$\Phi(A) \doteq \det(A)$

$$\Phi(I+\varepsilon H) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} H + O(\varepsilon^2)$$
$$\Phi(I+\varepsilon H) = \Phi(I) + \varepsilon\, d\Phi(I)[H] + o(\varepsilon)$$
per $\varepsilon \to 0$

$d\Phi(I) : H \longmapsto \operatorname{tr} H$ $\qquad$ applicazione lineale $V \longrightarrow \mathbb{R}$

GRUPPO SPECIALE LINEARE

$S := SL_{\mathbb{R}}(n) = \{ A \in V : \det(A) = 1 \}$ è una ipersuperficie in V ($\dim V = n^2$)

$\dim(S) = n^2 - 1$

OSS: $f \in C^k$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

L'INSIEME DI LIVELLO $\{(x,y) : f(x,y) = c\} = L_c$

PUÒ ESSERE SCRITTO COME GRAFICO

DI UNA FUNZIONE C^k IN UN INTORNO

DI TUTTI I PUNTI $(x,y) \in L_c$ T.C.

$\boxed{\operatorname{rk}(Df(x,y)) = m}$.

TALI PUNTI SI CHIAMANO

PUNTI REGOLARI DI $\{f = c\}$.

Nel nostro caso ~~es~~ useremo ciò con $\Omega = \mathbb{R}^{n^2} = V$, $f = \Phi$, $m = 1$, $L_c = S$

Per vedere che S è una ipersuperficie basta controllare che $\forall A \in S$ $\quad d\Phi(A) : V \to \mathbb{R}$ è surgettiva (basta non sia nulla)

Oss$_1$: se $A \in S \Rightarrow$ A invertibile

Oss$_2$: Se $A \in S \Rightarrow \det(A+\varepsilon H) = \det(A[I+\varepsilon A^{-1}H])$

$= \det(A)\det(I+\varepsilon A^{-1}H)$

$= \det(A)[1+\varepsilon \operatorname{tr}(A^{-1}H) + O(\varepsilon^2)]$ $\qquad \varepsilon \to 0$

$$\Phi(A+\varepsilon H) = \det(A+\varepsilon H) = \det(A) + \varepsilon(\det A)\,tr(A^{-1}H) + o(\varepsilon) \qquad \varepsilon \to 0$$

$$\Phi(A+\varepsilon H) = \Phi(A) + \varepsilon\, d\Phi(A)[H] + o(\varepsilon)$$

$$d\Phi(A) : H \longmapsto \det(A)\ tr(A^{-1}H)$$

purché A invertibile

se $A \in S$ $\quad \begin{array}{c} V \longrightarrow \mathbb{R} \\ H \longmapsto tr(A^{-1}H) \end{array}$

Questa applicazione non è mai identicamente nulla per $A \in S$

Basta calcolarla per $H = A$.

$\Rightarrow$ tutti i punti di S sono regolari per Φ

$\Rightarrow$ S è ipersuperficie in V.

$$T_I S = \{H \in V : d\Phi(I)[H] = 0\}$$
$$= \{H \in V : tr\, H = 0\}$$

$A \in S$

$$T_A S = \{H \in V : d\Phi(A)[H] = 0\}$$
$$= \{H \in V : tr(A^{-1}H) = 0\}$$

Esercizio:
Fare il conto esplicito in coordinate nel caso $n = 2$

$$\det\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = xt - yz$$

Verificare che $xt - yz = 1$ definisce una ipersuperficie in $\mathbb{R}^4$

Scrivere esplicitamente il piano tangente a $S = \{xt - yz - 1 = 0\}$ in ogni suo punto.

$O(n) \subseteq V$

$$\Sigma_n \doteq O(n) = \{ A \in V : {}^tA A = I \}$$ è una sottovarietà di dimensione $\frac{n^2-n}{2}$

Es: Se $n=2$ $\dim O(2) = 1$ rotazioni nel piano $O(2) \simeq S^1$

Se $n=3$ $\dim O(3) = 3$ rotazioni nello spazio

— o —

$A = (a_{ij})_{i,j}$

${}^tA \doteq (a_{ji})_{ij}$

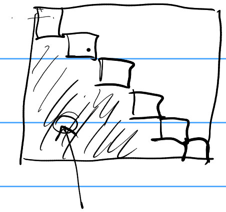
$$\psi(A) = {}^tA \cdot A$$

$$\psi : V \longrightarrow Sym(n) := \{ S \in V : S = {}^tS \}$$

$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$

$$S \doteq {}^tA A \Rightarrow {}^tS = {}^t({}^tA A) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = {}^tA A = S$$

$$\dim(Sym(n)) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$$



$$\psi : \underset{\mathbb{R}^{n^2}}{\overset{\cong}{V}} \longrightarrow \underset{\mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}}{\overset{\cong}{Sym(n)}}$$

Se dimostro che $\forall A \in O(n)$ $d\psi(A)$ è surgettivo $\Rightarrow O(n)$ è una sottovarietà di dimensione $n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$

Se $A = I$

Calcolo $\psi(I+\varepsilon H) = {}^t(I+\varepsilon H)(I+\varepsilon H)$

$= I + \varepsilon({}^tH + H) + o(\varepsilon)$ per $\varepsilon \to 0$

$d\psi(I) : H \longmapsto {}^tH + H$ è un applicazione lineare

$V \longmapsto Sym(n)$ è surgettiva

S simmetrica fissata basta prendere $H = \frac{1}{2}S$

$O(n)$ è una sottovarietà in un intorno di I.

$d\psi(A) = ?$

$\psi(A+\varepsilon H) = {}^t(A+\varepsilon H)(A+\varepsilon H) = I + \varepsilon({}^tAH + {}^tHA) + o(\varepsilon)$ $(\varepsilon \to 0)$

Se $A \in O(n)$ $(\Rightarrow \psi(A) = I)$ abbiamo che $= \psi(A) + \varepsilon({}^tAH + {}^tHA) + o(\varepsilon)$

$$d\psi(A) : \begin{matrix} V \longmapsto Sym(n) \\ H \longmapsto {}^tAH + {}^tHA \end{matrix}$$ è surgettiva $\forall A \in O(n)$

S chi è H tale che ${}^tAH + {}^tHA = S$?

$\boxed{H = \frac{1}{2}AS}$

5' pausa

$${}^tA\left(\tfrac{1}{2}AS\right) + {}^t\left(\tfrac{1}{2}AS\right)A = \frac{1}{2}\left[{}^tAAS + {}^tS\,{}^tAA\right] = \frac{1}{2}(S + {}^tS) = S$$

${}^tAA = I$, ${}^tS = S$, $A \in O(n)$

$\boxed{S = {}^tS}$ $S \in Sym(n)$

$\Rightarrow O(n)$ è esprimibile localmente come grafico da $\mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{\frac{n^2+n}{2}}$

matrici $\longrightarrow$ matrici simmetriche

$\Rightarrow O(n)$ è una sottovarietà di dim $\dfrac{n^2-n}{2}$

$$T_I O(n) = \{H : d\Psi(I)[H]=0\}$$

$$= \{H : {}^tH + H = 0\} = \text{Antisymmetriche}$$ matrici

$\boxed{n=2}$ le matrici antisimm sono multipli $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

generatore infinitesimale di una rotazione nel piano

Scomposizione di matrice in parte simmetrica & antisimm

$M \in V \qquad M = \frac{1}{2}(M+{}^tM) + \frac{1}{2}(M-{}^tM)$

$\boxed{n=3}$ le matrici antisymm sono del tipo $\begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$

Una base dello spazio tangente è $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

generatore infinit di una rot di asse z

g. i rot asse y

gen. i. rot. asse x

Esercizio*: $V = M(n \times n)$ $\quad \Phi : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \longrightarrow \det(A)$ $\quad A = (a_{ij})$

Trovare $\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\ \phi$ col vincolo $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = n$ ← sfera di $\mathbb{R}^{n^2}$

OSS: $\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 = tr({}^tA A)$

Es.

Trovare massimi e minimi di $f(x,y,z,t) = |xt - yz|$

sull'insieme $T_\ell := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2} = \ell\}$

con $\ell > 0$

OSS1 T_ℓ è compatto $\begin{cases} \text{chiuso} \longrightarrow g^{-1}(\ell) \text{ con } \boxed{g = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2}} \\ \text{limitato} \end{cases}$

funz. continua

$\hookrightarrow (x,y,z,t) \in T_\ell \Rightarrow \begin{matrix} x^2+y^2 \le \ell^2 \\ z^2+t^2 \le \ell^2 \end{matrix}$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+t^2 \le 2\ell^2$

$T_\ell \subseteq \overline{B(0,\sqrt{2}\ell)} \Rightarrow T_\ell$ limitato

f continua su T_ℓ compatto ammette max & min

$\min_{P \in T_\ell} f(P) = 0$ basta prendere $\begin{matrix} z=0 \\ t=0 \end{matrix}$ $\boxed{x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell}$

$\rightarrow f \equiv 0$

$\left(x^2+y^2 = \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{2} = \ell^2\right)$

Chiamo $F(x,y,z,t) = xt - yz$ $\qquad f = |F|$

e cerco $\max\limits_{\min} F$ $\qquad \max\limits_{T_\ell} f = \max\limits_{T_\ell} |F| = \max\{\max\limits_{T_\ell} F, -\min\limits_{T_\ell} F\}$

Posso restringere la ricerca all'insieme $D = \begin{cases} x^2+y^2 > 0 \\ z^2+t^2 > 0 \end{cases} \longleftarrow$ è un aperto

Metodo 1: (a) Verificare che $D \cap T_\ell$ è una ipersuperficie

(b) ed utilizzare il metodo dei molt. di Lagrange

$g = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2}$

$(x,y,z,t) \in T_\ell \cap D$

$\boxed{g \text{ è differenz. in } D}$

(a) Calcolo $\nabla g(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{z^2+t^2}} \\ \frac{t}{\sqrt{z^2+t^2}} \end{pmatrix}$

$\partial_x g = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}$

OSS $\nabla g(x,y,z,t) \neq \underline{0} \quad \forall (x,y,z,t) \in T_\ell \cap D$

$\Rightarrow T_\ell \cap D$ è ipersuperf.

molt. di Lagrange $\Rightarrow$ cerco soluzioni del sistema $\begin{cases} \nabla F = \lambda \nabla g \\ g(x,y,z,t) = \ell \end{cases}$

$F = xt - yz$

$\partial f = \lambda \partial_x g \rightsquigarrow \begin{cases} t = \lambda\, x/\sqrt{x^2+y^2} \\ -z = \lambda\, y/\sqrt{x^2+y^2} \\ -y = \lambda\, z/\sqrt{z^2+t^2} \\ x = \lambda\, t/\sqrt{z^2+t^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{z^2+t^2} = \ell \end{cases}$

sistema non lineare 4×4

finire x esercizio

———— o ————

$\boxed{\text{metodo 2}}$ Cambio di variabile

$r, \rho > 0$

$x = r\cos\theta \qquad z = \rho\cos\varphi$

$y = r\sin\theta \qquad t = \rho\sin\varphi$

$$f(x,y,z,t) = |r\rho\cos\theta\sin\varphi - r\rho\sin\theta\cos\varphi|$$

$$= r\rho\,|\cos\theta\sin\varphi - \sin\theta\cos\varphi| = r\rho\,|\sin(\theta-\varphi)|$$

$r + \rho = \ell$

θ, φ non ho vincoli

massimizzo $|\sin(\theta - \varphi)|$ (ed il max è 1)

massimizzo $r \cdot \rho$ con vincolo $r + \rho = \ell$