ANALISI 2

LEZIONE 11

5/11/2020

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MISURA

OBIETTIVO: DARE UN METODO PER "MISURARE" I SOTTOINSIEMI DI UN INSIEME X (ES. $X = \mathbb{R}^n$) CHE RISPETTI ALCUNE REGOLE "RAGIONEVOLI", SI COMPORTI BENE PER PASSAGGIO AL LIMITE E PERMETTA UNA TEORIA DELL'INTEGRAZIONE

σ-ADDITIVITÀ E σ-SUBADDITIVITÀ

X INSIEME, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ FAMIGLIA DI SOTTOINSIEMI DI X

$f : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$

- f È σ-SUBADDITIVA SE, DATI $E_1, \dots E_n, \dots \in \mathcal{E}$ T.C. $\bigcup_i E_i \in \mathcal{E}$, ALLORA $f(\bigcup_i E_i) \leq \sum_i f(E_i)$
- f È σ-ADDITIVA SE, DATI $E_1, \dots E_n, \dots \in \mathcal{E}$ DISGIUNTI CON $\bigcup E_i \in \mathcal{E}$, ALLORA $f(\bigcup_i E_i) = \sum_i f(E_i)$

DEF: $f : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ σ - SUBADDITIVA

SI DICE **MISURA ESTERNA** SU X

DEF: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ SI DICE UNA **σ - ALGEBRA** SE

- $\emptyset \in \mathcal{E}$
- $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^c = X \setminus A \in \mathcal{E}$
- $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{E}$ e $\bigcap_i A_i \in \mathcal{E}$

ES: $\mathcal{P}(X)$, $\{\emptyset, X\}$

DEF: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-ALGEBRA,

$m : \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ σ-ADDITIVA

SI DICE MISURA SU X CON σ-ALGEBRA $\mathcal{E}$

$(X, \mathcal{E}, m)$ È UNO SPAZIO DI MISURA

PROP: m MISURA ALLORA

- m σ-SUBADDITIVA SU $\mathcal{E}$
- m MONOTONA, CIOÈ $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow m(E_1) \leq m(E_2)$

$$\left(m(E_2) = m(E_1) + m(E_2 \setminus E_1) \geq m(E_1) \right)$$

DATA $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ SI DENOTA CON $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$ LA PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA CHE CONTIENE $\mathcal{E}$, SI DICE ANCHE CHE $\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$ È LA σ-ALGEBRA GENERATA DA $\mathcal{E}$.

$\sigma\mathcal{A}(\mathcal{E})$ È BEN DEFINITA PERCHÉ L'INTERSEZIONE DI σ-ALGEBRE È UNA σ-ALGEBRA (VERIFICARE).

DEF: X SP. METRICO (BASTEREBBE TOPOLOGICO)

$\mathcal{B}(X)$ È LA σ-ALGEBRA GENERATA DAGLI APERTI DI X,

SI CHIAMA **σ-ALGEBRA DEI BORELIANI**.

UNA MISURA m, $(X, \mathcal{E}, m)$ SI DICE DI BOREL SE $\mathcal{E} \supseteq \mathcal{B}(X)$.

OSS: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

$$|\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)| \simeq |\mathbb{R}| = c$$

$$|\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)| = 2^c > c$$

ESEMPI DI MISURE:

- misura banale, $\mathcal{E} = \{\emptyset, X\}$, $m(\emptyset) = 0$, $m(X) = 1$
- $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$, $m(E) = |E| \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$
- δ_x, $x \in X$, $\delta_x(E) = \begin{cases} 0 & x \notin E \\ 1 & x \in E \end{cases}$, $\mathcal{E} = \mathcal{P}(X)$

DEF: $(X,\mathcal{E},m)$, $N\in\mathcal{E}$ SI DICE DI MISURA NULLA O TRASCURABILE SE $m(N)=0$.

DEF: $(X,\mathcal{E},m)$ È COMPLETO SE, DATO $N\in\mathcal{E}$ DI MISURA NULLA E $N'\subseteq N \Rightarrow N'\in\mathcal{E}$ (E QUINDI $m(N')=0$).

COME PASSARE DA UNA MISURA ESTERNA A UNA MISURA E VICEVERSA (METODO DI CARATHÉODORY)

DEF: m MISURA ESTERNA, $E\subseteq X$ DICIAMO CHE E È MISURABILE PER m SE

$$m(A) = m(A\cap E) + m(A\cap E^c) \quad \forall A\subseteq X$$

TEOREMA DATA m MISURA ESTERNA

$\mathcal{M}_m = \{ E$ MISURABILI PER $m \}$ È UNA σ-ALGEBRA

E $m|_{\mathcal{M}_m}$ È UNA MISURA SU X.

INOLTRE $(X, \mathcal{M}_m, m)$ È COMPLETO.

TEOREMA $(X, \mathcal{E}, m)$ SPAZIO DI MISURA

$$m^*(E) = \inf \{ m(F) : F \supseteq E,\ F \in \mathcal{E} \} \quad \forall E \subseteq X$$

È LA MISURA ESTERNA GENERATA DA m

E SI HA $m^*|_{\mathcal{E}} = m$.

OSS: SE HO $(X, \mathcal{E}, m)$ SP. DI MISURA

$\Rightarrow (X, \mathcal{M}_{m^*}, m^*|_{\mathcal{M}_{m^*}})$ È UNO SP. DI MISURA COMPLETO CHE ESTENDE $(X, \mathcal{E}, m)$, CIOÈ

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}_{m^*}$ E $m^*|_{\mathcal{E}} = m$.

m^* SI DICE COMPLETAMENTO DI m.

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

DEFINIAMO PRIMA LA MISURA ESTERNA DI L.

$$R = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] \quad \text{RETTANGOLO (CHIUSO)}$$

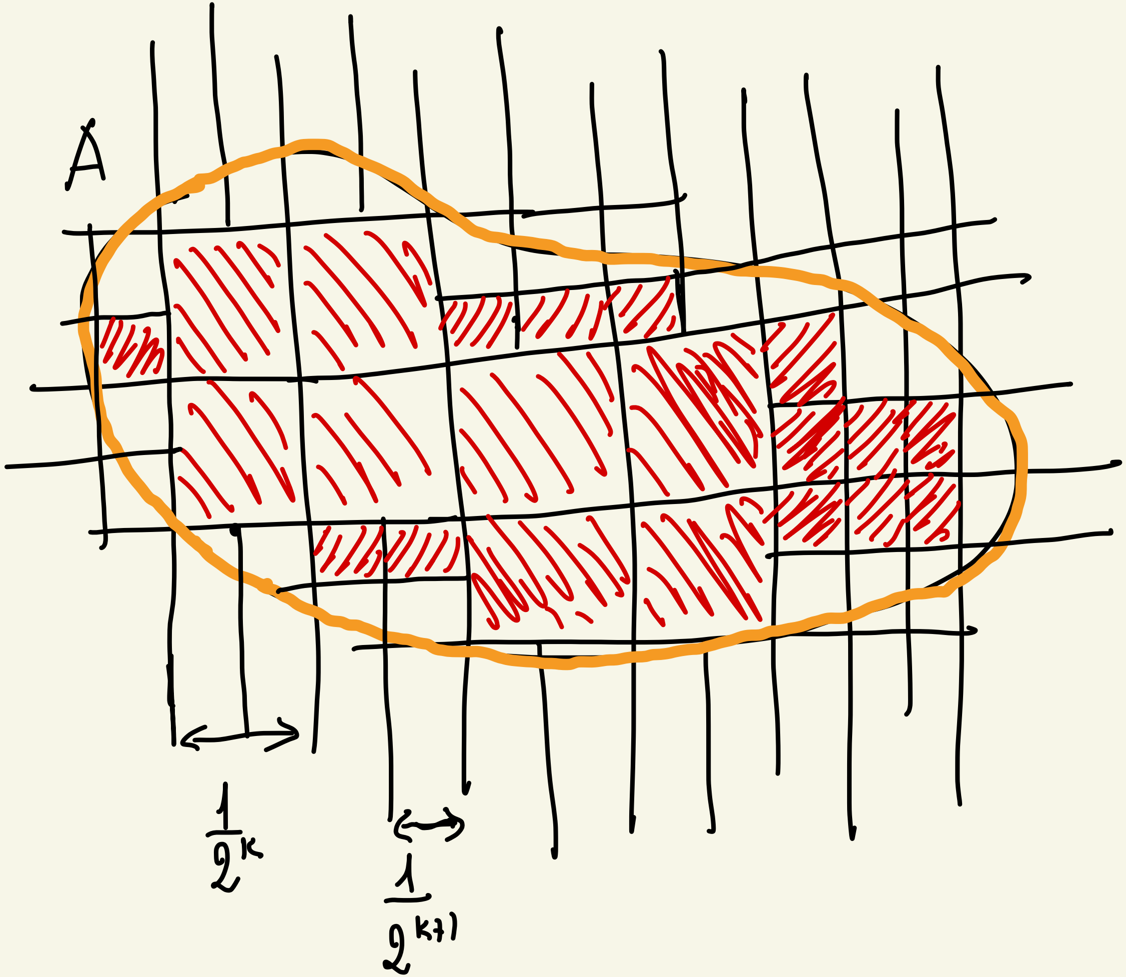
$$m^*(R) = \prod_i (b_i - a_i), \qquad m^*(P) = \sum_{j=1}^{\infty} m^*(R_j)$$

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \quad \text{CON } \mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \emptyset \text{ SE } i \neq j$$

OSS: OGNI APERTO $A \subseteq \mathbb{R}^n$

SI PUÒ SCRIVERE IN QUESTO MODO

$n=2$



DEFINIAMO

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_j m^*(P) : E \subseteq P = \bigcup_j R_j \right\}$$

QUESTA È UNA MISURA ESTERNA E

$\mathcal{L} = m^* \big|_{\mathcal{M}_{m^*}}$ SI DICE MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{M}_{m^*}$ È LA σ-ALGEBRA DEGLI INSIEMI MISURABILI SECONDO LEBESGUE

OSS: $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ $\forall A$ APERTO $\Longrightarrow$

$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ CIOÈ

$\mathcal{L}$ È UNA MISURA DI BOREL

OSS: $|\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)| = 2^c$, IN PART. $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

(n=1) INFATTI $C \subseteq [0,1]$ INSIEME DI CANTOR $\Rightarrow$

$\mathcal{L}(C) = \inf \{ \mathcal{L}(P) : P \supseteq C$ PLURI-INTERVALLO$\} = 0$

$|C| = |\mathbb{R}| = c \Rightarrow 2^c = |\mathcal{P}(C)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| \leq |\mathcal{M}(\mathbb{R})|$

POICHÉ $\mathcal{L}$ È COMPLETA E $\mathcal{P}(C) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R})$

OSS: SI PUÒ MOSTRARE CHE $\forall E \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ T.C. $E \Delta B$ HA MISURA NULLA.

ESEMPIO: (INSIEME DI VITALI) $\exists E \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$, IN PARTICOLARE $E \notin \mathcal{B}(\mathbb{R})$ E $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$\sim$ RELAZIONE DI EQUIV. SU $\mathbb{R}$

$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ $\qquad [x] = x + \mathbb{Q}$

SIA $E \subseteq [0,1)$ T.C. $E \cap [x] = \{y_x\}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

UN TALE INSIEME ESISTE PER L'ASSIOMA DELLA SCELTA

OSSERVIAMO

- $F = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (E + q) \subseteq [-1, 2]$

- $F \supseteq [0, 1)$

- $(E + q_1) \cap (E + q_2) = \emptyset$

CIOÈ L'UNIONE È DISGIUNTA

$\Rightarrow$ SE E FOSSE MISURABILE $\Rightarrow$

F SAREBBE MISURABILE, CON $1 \leq \mathcal{L}(F) \leq 3$

MA $\mathcal{L}(F) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mathcal{L}(E)$ ASSURDO

PROP: E MIS. SECONDO L. $\Rightarrow$

① $m(E) = \inf \{ m(A) : A \supseteq E \text{ APERTO} \}$

② $m(E) = \sup \{ m(K) : K \subseteq E \text{ COMPATTO} \}$

IN PARTICOLARE

E LIMITATO È MISURABILE

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon \; \exists \; K_\varepsilon \subseteq E \subseteq A_\varepsilon$ CON K_ε CPT E A_ε APERTO

T.C. $m(A_\varepsilon) - m(K_\varepsilon) < \varepsilon$.

DIM:

① $m(E) = \inf \left\{ m(P) : P = \bigcup_j R_j \supseteq E \right\}$

IN PARTICOLARE $\forall \varepsilon \quad \exists P_\varepsilon$ CON

$$m(P_\varepsilon) < m(E) + \frac{\varepsilon}{2}$$

DEF. $A_\varepsilon = \bigcup_j R_{j,\varepsilon}$ DOVE

$$R_j = \prod_{k=1}^{n} [a_{j,k}, b_{j,k}] \Rightarrow R_{j,\varepsilon} = \prod_k (a_{j,k} - \delta_j, b_{j,k} + \delta_j)$$

DOVE δ_j È T.C. $m(R_{j,\varepsilon}) = m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$

$$\Rightarrow m(A_\varepsilon) \leq \sum_j m(R_{j,\varepsilon}) = m(P_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} < m(E) + \varepsilon$$

② PRENDIAMO E LIMITATO, FISSAMO $\varepsilon > 0$ E SCEGLIAMO $A_\varepsilon \supseteq \bar{E} \setminus E$ APERTO T.C. $m(A_\varepsilon) < m(\bar{E} \setminus E) + \varepsilon$ (POSSIAMO FARLO PER ①).

SIA $K_\varepsilon = \bar{E} \setminus A_\varepsilon = E \setminus A_\varepsilon \subseteq E$ COMPATTO

$$\Rightarrow m(K_\varepsilon) = m(E \setminus A_\varepsilon) = m(E) - m(E \cap A_\varepsilon)$$

$$= m(E) - m(A_\varepsilon) + m(A_\varepsilon \setminus E)$$

$$\geq m(E) - m(A_\varepsilon) + m(\bar{E} \setminus E) > m(E) - \varepsilon .$$

SE E È ILLIMITATO CONSIDERO $E \cap B_{R_\varepsilon}$ DOVE R_ε È T.C. $m(E \cap B_{R_\varepsilon}) \geq m(E) - \varepsilon$.

DEFINIZIONE "COSTRUTTIVA" DELLA MISURA DI L.

① $R = \prod_k [a_k, b_k] \Rightarrow m(R) = \prod_k (b_k - a_k)$

② $P = \bigcup_{j=1}^{N} R_j \,,\quad \mathring{R}_i \cap \mathring{R}_j = \phi \quad i \neq j \Rightarrow m(P) = \sum_{j=1}^{N} m(R_j)$

③ A APERTO $\Rightarrow m(A) = \sup \{ m(P) : P \subseteq A \}$

K CPT $\Rightarrow m(K) = \inf \{ m(P) : P \supseteq A \}$

④ $m^*(E) = \inf \{ m(A) : A \supseteq E \}$ MISURA ESTERNA DI LEB. (COSTRUITA PRIMA)

$m_*(E) = \sup \{ m(K) : K \subseteq E \}$ MISURA INTERNA DI LEB.

DEF: E MIS. $\Leftrightarrow m_*(E) = m^*(E) = m(E)$

PROP: LE DUE COSTRUZIONI DANNO LA STESSA MISURA.

OSS: POTREI DEFINIRE

$$m_J^*(E) = \inf\{ m(P) : P \supseteq E \} \qquad P = \bigcup_{j=1}^{N} R_j$$

$$m_{J*}(E) = \sup\{ m(P) : P \subseteq E \}$$

$\forall E$ SI HA $\quad m_{J*}(E) \leq m_*(E) \leq m^*(E) \leq m_J^*(E)$

E È MISURABILE SECONDO JORDAN SE $\quad m_{J*}(E) = m_J^*(E)$

IN PARTICOLARE E È LEB. MISURABILE

MA $\exists\, E$ L-MIS. NON J-MIS.

ES: $E = \mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ SI HA $\quad m_{J*}(E) = m_*(E) = m^*(E) = 0$

MA $\quad m_J^*(E) = 1$

ES: (RAZIONALI INGRASSATI)

$$A_\varepsilon = \bigcup_{q_j \in \mathbb{Q}} \left(q_j - \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}, q_j + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \right) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathbb{Q} = \{ q_1, q_2, \dots q_j, \dots \}$$

A_ε APERTO, $\quad \frac{\varepsilon}{2} < m(A_\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$

A_ε DENSO, CIOÈ $\overline{A_\varepsilon} = \mathbb{R}$

A_ε NON È MIS. SECONDO JORDAN

$m_{J*}(A_\varepsilon) = m(A_\varepsilon)$, $\quad m_J^*(A_\varepsilon \cap [a,b]) = b-a \quad \forall a < b$

OSS: PER COSTRUZIONE LA MISURA DI LEBESGUE

È INVARIANTE PER TRASLAZIONI, RIFESSIONI

E ROTAZIONI.

OSS: SI PUÒ MOSTRARE CHE SE μ È UNA

MISURA IN $\mathbb{R}^n$ FINITA SUI COMPATTI

E INVARIANTE PER TRASLAZIONI

$$\Longrightarrow \mu = c \cdot \mathcal{L}, \qquad c \in [0, +\infty)$$