12 nov 2020

Lez 8

OSS: $f \in C^k$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

L'INSIEME DI LIVELLO $\{(x,y) : f(x,y) = c\} = L_c$

PUÒ ESSERE SCRITTO COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^k IN UN INTORNO DI TUTTI I PUNTI $(x,y) \in L_c$ T.C.

$$rk(Df(x,y)) = m.$$

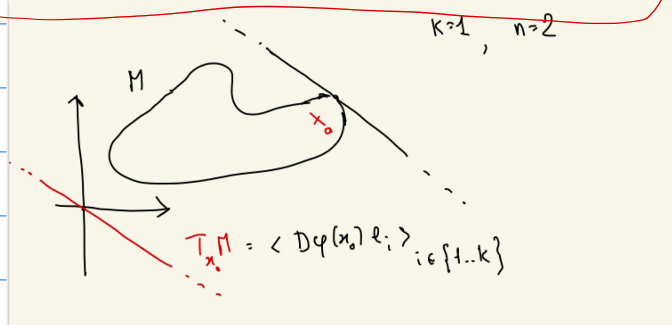
TALI PUNTI SI CHIAMANO PUNTI REGOLARI DI $\{f = c\}$.

SPAZIO TANGENTE ← Lez 9

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ K-VARIETÀ DIFF.

[CIOÈ DATO $x_0 \in M$ $\exists\, U$ INT. E
$\varphi : B_r(0) \to U$ DIFFEOMORFISMO
$\varphi(0) = x_0$ E $\varphi((\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap B_r(0)) = M \cap U$]

LO SPAZIO VETTORIALE $D\varphi(0)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = T_{x_0}M < \mathbb{R}^n$, $\dim(T_{x_0}M) = k$,
SI DICE SPAZIO TANGENTE A M IN x_0



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ $\qquad f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$

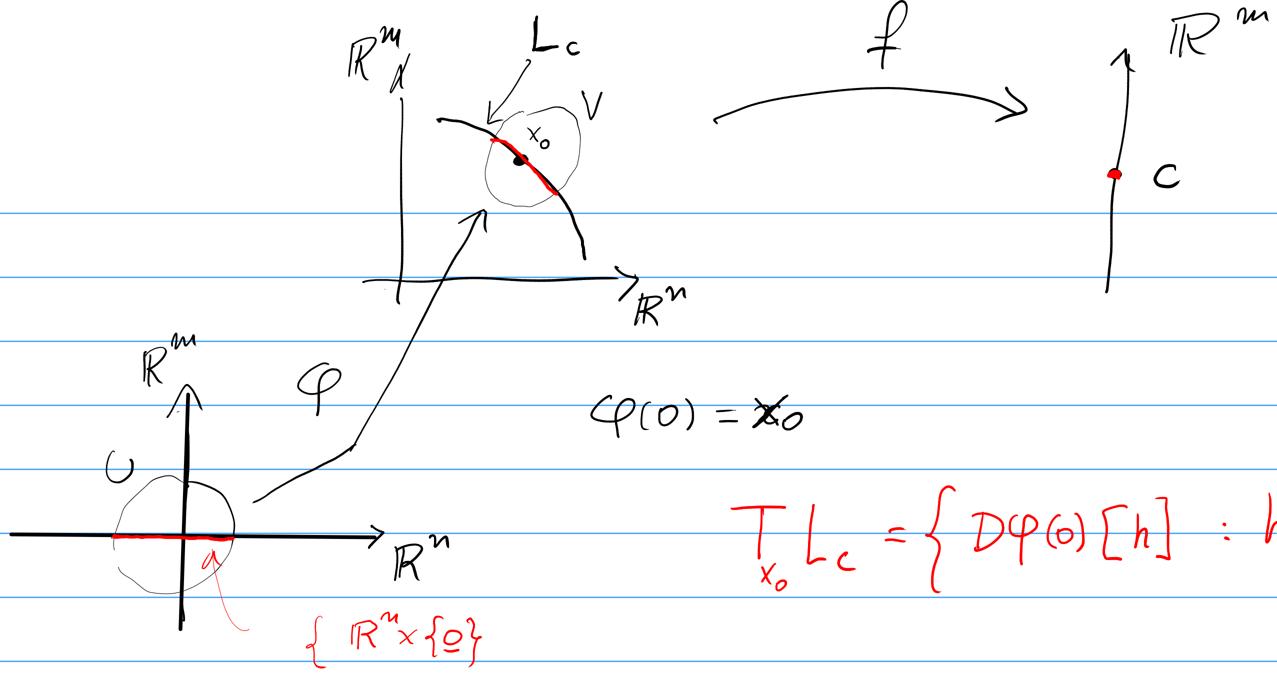
$$L_c = \{x : f(x) = c\}$$

di dimensione n

L_c è ~~una~~ loc una sottovarietà nell'intorno di ogni $x_0 \in L_c$ tale che $df(x_0)$ ha rango massimo

$df(x_0) : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\boxed{T_{x_0}L_c = \operatorname{Ker} df(x_0) \quad **}$$



$\varphi(0) = x_0$

$T_{x_0} L_c = \{ D\varphi(0)[h] \; : \; h \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\} \}$ (*)

La caratterizz (*) data a lezione definisce lo stesso oggetto di (**)

$f \circ \varphi : \mathbb{R}^n \times \{0\} \longrightarrow \{c\}$ $\qquad$ $f \circ \varphi$ è costante su $\mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$

$d(f \circ \varphi)(0)[h] = 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$

$\quad \searrow \quad df(\varphi(0))[d\varphi(0)[h]] = 0 \qquad \forall h \in \mathbb{R}^n \times \{\underline{0}\}$

x_0

$\Rightarrow df(x_0)$ si annulla su tutti i vettori del tipo $d\varphi(0)[h]$, $h \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$

$df(x_0)$ " " su $T_{x_0} L_c$ (come definito a lezione) $\rightarrow T_{x_0} L_c \subset \ker df(x_0)$

da un argomento di algebra lineare segue che

$$\dim T_{x_0} L_c = n \qquad \dim \operatorname{Ker} df(x_0) = n$$

$$T_{x_0} L_c = \operatorname{Ker} df(x_0)$$

$V = M_{\mathbb{R}}(n \times n) \qquad A \in V \qquad A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$

$\Phi(A) = \det(A) \qquad \Sigma = \{ A = (a_{ij}) : \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2 = n \}$

$\underset{A \in \Sigma}{\min}\ (\max)\ \phi(A)$

$\boxed{\underline{Oss_0}: \max_{A \in \Sigma} \phi(A) = - \min_{A \in \Sigma} \Phi(A)}$

$\underline{Oss_1}$: Σ è un insieme compatto (palla in $\mathbb{R}^{n^2}$)

$V \simeq \mathbb{R}^{n^2}$

Σ è un'ipersuperficie

$\underline{Oss2}$: $\sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}^2 = tr({}^tA A)$

infatti se A_j la j-esima colonna di A

$$tr({}^tA A) = \sum_j {}^tA_j A_j = \sum_j |A_j|^2 = \sum_j \sum_i a_{ij}^2$$

$\phi(A) = \det A \qquad g(A) = tr({}^tA A)$

$\boxed{\underline{Oss_3}: \text{Cerchiamo max e min su } \phi(A) \neq 0}$ $\qquad g(A) = n \longleftarrow$ vincolo

$\underline{\text{Molt. di Lagrange}} \Longrightarrow$ se A è punto staz per ϕ con vincolo $\{g = n\}$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

Allora $\gamma(\lambda, A)$ soddisfa il sistema

$$\begin{cases} d\phi(A)[H] = \lambda\, d\, g(A)[H] & \forall H \in V \\ g(A) = n \end{cases}$$

se $\det(A) \neq 0$

$$d\phi(A)[H] = \det(A)\, tr(A^{-1}H)$$

(conto della volta scorsa)

$$d\, g(A)[H] = tr({}^tAH + {}^tHA)$$

si calcola sviluppando $tr({}^t(A+\varepsilon H)(A+\varepsilon H))$

(quasi identico della volta scorsa)

$$\begin{cases} \det(A)\, tr(A^{-1}H) = \lambda\, tr({}^tAH + {}^tHA) & \text{①} \quad \forall H \in V \\ tr({}^tAA) = n & \text{②} \end{cases}$$

Se $H = A$ ① diventa $\det(A)\, \cancel{n} = 2\lambda\, tr({}^tAA) = 2\lambda \cancel{n}$

$$\lambda = \frac{\det(A)}{2}$$

Eliminando λ ① diventa

$$\cancel{\det(A)}\, tr(A^{-1}H) = \frac{\cancel{\det(A)}}{2}\, tr({}^tAH + {}^tHA) \quad \forall H \in V$$

$$2\,\mathrm{tr}(A^{-1}H) = \mathrm{tr}({}^tAH + {}^tHA) \qquad \forall H \in V$$

$H = AK$

$K \in V$ arbitraria

$$2\,\mathrm{tr}(A^{-1}AK) = \mathrm{tr}({}^tAAK + {}^tK\,{}^tAA)$$

$$2\,\mathrm{tr}(K) = \mathrm{tr}(\underbrace{{}^tAAK}_{B}) + \mathrm{tr}(\underbrace{{}^tK\,{}^tAA}_{{}^tB})$$

$\mathrm{tr}\,B = \mathrm{tr}\,{}^tB$

$$\cancel{2}\,\mathrm{tr}(K) = \cancel{2}\,\mathrm{tr}({}^tAA\,K)$$

$V \longrightarrow \mathbb{R}$ lineare

$K \longmapsto \mathrm{tr}((I - {}^tAA)K)$

$$(\star)\quad \mathrm{tr}((I - {}^tAA)K) = 0 \qquad \forall K \in V$$

$$\Updownarrow$$

$${}^tAA = I$$

si verifica ~~considerando~~ l'effetto su $K = (k_{ij})$ con $k_{ij} = \begin{cases} 1 & i = i_0,\ j = j_0 \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$

$\langle A, B \rangle \longrightarrow \mathrm{tr}({}^tAB)$ è un prodotto scalare (def positivo) (non deg)

$$(\star)\quad \langle I - {}^tAA, K \rangle = 0 \quad \forall K \implies I - {}^tAA = 0$$

$\implies A$ è matrice ortogonale $(\star)$

$$\det(A) = \pm 1$$

$$\max_{A \in \Sigma} \Phi(A) = 1 \qquad \min_{A \in \Sigma} \Phi(A) = -1$$

(*) **Oss:** Tutte le matrici ortogonali stanno in Σ_1

$$C \equiv \begin{cases} \underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{g_1} = 0 \\ \underbrace{x^2+y^2-x}_{g_2} = 0 \end{cases}$$

(a) C è compatta

(b) Quali sono i punti regolari di C

(c) $f(P) = d(P, P_0)$ con $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \max\limits_{P \in C} f(P)$, $\min\limits_{P \in C} f(P)$

(a) È immediata: $g_1 = 0 \Rightarrow$ sono sulla buccia della sfera — LIMITATEZZA

C è chiuso $g_1^{-1}(0) \cap g_2^{-1}(0) = C$ con g_1, g_2 continue

(b) C è una curva regolare in un intorno di $p \in C$ sse

$\begin{pmatrix} \nabla g_1(P) \\ \nabla g_2(P) \end{pmatrix}$ ha rango 2

$\nabla g_1(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g_2(x,y,z) = (2x-1, 2y, 0)$

$$rk \begin{pmatrix} 2x & \boxed{2y} & 2z \\ 2x-1 & \boxed{2y} & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = -4yz$ se $\begin{cases} z \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$ è var regolare

se $z = 0$, $\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 2x-1 & 2y \end{vmatrix} = -2y$ e $y \neq 0$ è regolare

$z = 0$ $y = 0 \overset{P \in C}{\Rightarrow} x = 1$ $(1,0,0) \in C$ è punto singolare se $y=0$ $\quad \begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 2x-1 & 0 \end{vmatrix} = (2x-1)(2z)$

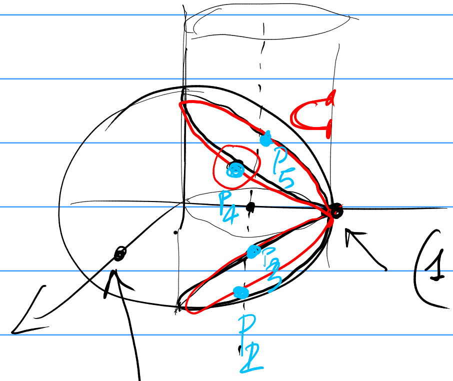
$z=0$ ottengo nuov. il punto critico $(1,0,0)$

$z\neq 0 \Rightarrow (2x-1)=0$ cioè $x=\frac{1}{2}$

ma $P=(\frac{1}{2},0,z)\notin C$ perché $g_2(P)\neq 0$

$\{g_1(P)=0\}$

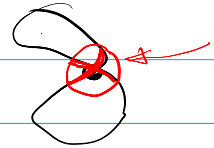
↑ sfera unitaria



$x^2+y^2-x=0$

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

$(1,0,0)=P_1$



$P_0=(0,1,0)$

$P=(x,y,z)$

$f(P)=d^2(P,P_0)$ $\quad f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$ dist. da P_0

Oss se $P\in C\cap\mathbb{R}^3\setminus\{P_1\}$ è un punto staz. per f ristretto a $C \Rightarrow$ $\exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ t.c. λ,μ,P risolve

$$(\star)\quad \begin{cases} \nabla \cancel{f}h(P)=\lambda\nabla g_1(P)+\mu\nabla g_2(P) \\ g_1(P)=0 \\ g_2(P)=0 \end{cases}$$

sistema lineare in 5 incognite

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 + z^2$$

Su C la funzione $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$

coincide con $h(x,y,z) = 2 - 2y$

Scrivo il sistema $*$ per h (invece che per f)

$$\begin{cases} 0 = \lambda 2x + \mu(2x-1) \\ -2 = \lambda 2y + \mu 2y \\ 0 = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ x^2+y^2-x = 0 \end{cases}$$

$z = 0 \vee \lambda = 0$

c'è solo il punto $(1,0,0)$ P_1

$$\begin{cases} 0 = \mu(2x-1) \\ -2 = 2\mu y \\ x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ x^2+y^2-x = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \mu \neq 0$$

$x = \frac{1}{2}$ $\quad y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow |y| = \frac{1}{2}$ $\quad |z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 1$$

Ottengo i punti $P_2 = \left(\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P_4$

$P_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = P_5$

Massimo e minimo di f esiste ($\times$ compattezza)

e vanno ricercati tra i punti $\boxed{P_1, P_2, P_3}, P_4, P_5$

(finire per esercizio)

$\forall \alpha, \beta > 0 \quad \exists\, C = C(\alpha, \beta) > 0$ t.c.

(a) $\quad x^\alpha y^\beta \leq C\left(x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta}\right) \qquad \forall\ \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}$

---

calcolare il C ottimale

OSS$_1$ entrambi i membri della disug (a) sono omogenei di grado $\alpha+\beta$

OSS$_2$: $S = \left\{ \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix},\ x^{\alpha+\beta} + y^{\alpha+\beta} = 1 \right\}$

S compatto

$$C \stackrel{\cdot}{=} \max_{(x,y) \in S} x^\alpha y^\beta > 0$$

OSS$_3$: Il C_i definito sopra soddisfa la relaz

ⓐ per ogni (x,y): $x \geq 0$
$y \geq 0$

---

per calcolare C si risolve molt. di Lagrange