Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 2)

I punti marcati con $(\star)$ corrispondono a richieste con un livello di difficoltà più alto di quello degli esercizi dei compiti scritti. Queste sono da considerarsi facoltative.

In fondo agli esercizi proposti è presente una piccola nota in forma di esercizio aggiuntivo sui limiti in coordinate polari piane.

Esercizio 1

Siano g e h funzioni reali a variabile reale tali che:

1. $$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{y\to\pm\infty} h(y) = +\infty;$$

2. $$\inf_{\mathbb{R}} g > -\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}} h > -\infty.$$

   Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

   $$f(x, y) := g(x) + h(y).$$

   - Dimostrare che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty$;
   - Dimostrare che $\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y)$ non esiste se l'ipotesi 2 non viene soddisfatta.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ \cos(x) & \text{se } x = y \end{cases}.$$

- Studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$;
- Studiare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$ $(\star)$.

Esercizio 3

Sia f la funzione reale definita su $\mathbb{R}^3$ attraverso la seguente espressione analitica:

$$f(x, y, z) = 2|x| + |y| + |z|.$$

Discutere i seguenti problemi:

$$\max_E f, \qquad\qquad \min_E f;$$

dove $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2yz = 1\}$.

Extra

Limiti in coordinate polari piane

Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, si definisca la mappa

$$\tilde{f} : (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$

nel modo seguente:

$$\tilde{f}(\rho, \theta) := f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)).$$

Dimostrare sfruttando le definizioni di limite, di estremo superiore e di estremo inferiore che:

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = 0 \iff \lim_{\rho\to+\infty} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\tilde{f}(\rho, \theta)| = 0;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 \iff \lim_{\rho\to0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\tilde{f}(\rho, \theta)| = 0;$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = +\infty \iff \lim_{\rho\to+\infty} \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = +\infty;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = +\infty \iff \lim_{\rho\to0^+} \inf_{\theta\in[0,2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = +\infty;$$

$$\lim_{(x,y)\to\infty} f(x, y) = -\infty \iff \lim_{\rho\to+\infty} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = -\infty;$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = -\infty \iff \lim_{\rho\to0^+} \sup_{\theta\in[0,2\pi]} \tilde{f}(\rho, \theta) = -\infty.$$