ANALISI 2

LEZIONE 12

M. NOVAGA

INTEGRAZIONE

DEF: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ SPAZI DI MISURA

$f : X \to Y$ SI DICE MISURABILE

SE $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$.

QUANDO $Y = \mathbb{R}$ (o $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), $\mathbb{R}^n$

SE NON SPECIFICATO SI PRENDE

$\mathcal{B}$ = σ-ALG. DEI BORELIANI, QUINDI

$f : X \to \mathbb{R}$ È MIS. SE $f^{-1}(A)$ È MIS. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ DI BOREL

OSS: È SUFF. VERIFICARE CHE

$f^{-1}(A)$ È MIS. $\forall A$ APERTO

O ANCHE $f^{-1}((a,+\infty))$ È MIS. $\forall a \in \mathbb{R}$

DEF: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È MISURABILE SECONDO L.
SE $f^{-1}(A)$ È L.MIS. $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ APERTO

DEF: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ SI DICE BORELIANA SE
$f^{-1}(A)$ È DI BOREL $\forall A$ APERTO
IN PART. f BORELIANA $\Rightarrow$ f È L.-MISURABILE

OSS: $\exists f$ MIS. NON BORELIANA

N DI MISURA NULLA NON DI BOREL

($N \subseteq C$, C INSIEME DI CANTOR)

$$f(x) = \chi_N(x) = \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & x \notin N \end{cases}$$

$$f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)\right) = N$$

OSS: $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ CONT. E $E \subseteq \mathbb{R}$ MISUR. NON BOREL

T.C. $f^{-1}(E)$ NON È MISUR.

TEO: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA,
LE FUNZIONI MISURABILI $\mathcal{M} = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ mis.} \}$
VERIFICANO LE SEGUENTI PROPRIETÀ:

- $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \pm g \in \mathcal{M}$ E $\lambda f \in \mathcal{M} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{M}$, INOLTRE $f/g \in \mathcal{M}$ SE $g \neq 0$
- $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n \in \mathcal{M} \ \forall n \Rightarrow$

$$\sup_n f_n \in \mathcal{M}, \quad \inf_n f_n \in \mathcal{M}, \quad \limsup_n f_n \in \mathcal{M}, \quad \liminf_n f_n \in \mathcal{M}$$

IN PARTICOLARE SE $\lim_n f_n(x) = f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f \in \mathcal{M}$$

DIM: $\odot$ $f, g \in \mathcal{M} \Rightarrow f+g \in \mathcal{M}$

BASTA OSSERVARE CHE $\forall c \in \mathbb{R}$

$$(f+g)^{-1}((c,+\infty)) = \{x : f(x)+g(x) > c\} \in \mathcal{A}$$

$$\{f+g>c\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f>q\} \cap \underbrace{\{g > c-q\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A}$$

$\odot$ $f^2 \in \mathcal{M}$

$$\{f^2 > c\} = \begin{cases} f^{-1}(\mathbb{R}) & c<0 \\ \{f>\sqrt{c}\} \cup \{f<-\sqrt{c}\} & c \geq 0 \end{cases} \in \mathcal{A}$$

- $f \cdot g = \dfrac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4} \in \mathcal{M}$

- $g \neq 0$, $g \in \mathcal{M}$: $\left\{ \dfrac{1}{g} > c \right\} = \left\{ g < \dfrac{1}{c} \right\} \in \mathcal{A} \quad \forall c \neq 0$

- $f_n \in \mathcal{M}$: $\left\{ \inf_n f_n < c \right\} = \bigcup_n \left\{ f_n < c \right\} \in \mathcal{A} \quad \forall c$

$$\left(\inf_n f_n\right)(x) < c \iff \exists f_n : f_n(x) < c$$

<u>OSS:</u> IL RISULTATO SI ESTENDE A

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

INTEGRALE

$s : X \to [0, +\infty)$ È SEMPLICE SE

$$s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i} \qquad c_i \in [0, +\infty), \quad A_i \in \mathcal{A}, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ se } i \neq j$$

$$\int_X s \, d\mu \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{i=1}^{N} c_i \, \mu(A_i) \in [0, +\infty]$$

$f : X \to [0, +\infty]$ MISURABILE

$$\int_X f \, d\mu \underset{\text{DEF}}{=} \sup_{\substack{s \leq f \\ s \text{ semplice}}} \int_X s \, d\mu \in [0, +\infty]$$

OSS: $f = 0$ QUASI OVUNQUE, CIOÈ $\mu(\{f > 0\}) = 0$, $\iff \int_X f = 0$

DATO $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{A}$, $\int_E f \underset{DEF}{=} \int_X f \cdot \chi_E$ $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$

TEOREMA $f, g \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to [0, +\infty)$,

- $\int_X f + g = \int_X f + \int_X g$ ADDITIVITÀ
- $\int_X c \cdot f = c \int_X f \quad \forall c \geq 0$
- $E, F \in \mathcal{A}$, $E \cap F = \emptyset \Rightarrow \int_{E \cup F} f = \int_X f (\chi_E + \chi_F) = \int_E f + \int_F f$
  ADDITIVITÀ RISP. AL DOMINIO
- $f \leq g \Rightarrow \int_X f \leq \int_X g$ MONOTONIA

TEOREMA DI CONVERGENZA MONOTONA

(O DI BEPPO LEVI)

$f_n : X \to [0, +\infty) \qquad f_n \leq f_{n+1} \qquad f = \sup_n f_n : X \to [0, +\infty]$

$$\Longrightarrow \int_X f = \lim_n \int_X f_n = \sup_n \int_X f_n .$$

OSS: SE $\mu(\{f = +\infty\}) > 0 \Longrightarrow \int_X f = +\infty$

DIM: $f \geq f_n \ \forall n \Rightarrow \int_X f \geq \int_X f_n \ \forall n \Rightarrow \int_X f \geq \sup_n \int_X f_n$

DEVO VEDERE CHE $\sup_n \int_X f_n \geq \int_X f = \sup_{s \leq f} \int_X s$

PER QUESTO È SUFF. MOSTRARE

$\sup_n \int_X f_n \geq \int_X s \quad \forall s \leq f$ SEMPLICE

SIA QUINDI $s = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{A_i}$ CON $A_i \in \mathcal{A}$ DISGIUNTI

PONIAMO $A_0 = X \setminus \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, $\{A_0, A_1 \dots A_N\}$ PARTIZIONE DI X

$$\int_X f_n = \sum_{i=0}^{N} \int_{A_i} f_n \geq \sum_{i=1}^{N} \int_{A_i} f, \qquad \int_X s = \sum_{i=1}^{N} c_i \mu(A_i)$$

È SUFF. MOSTRARE CHE

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq c_i \mu(A_i) \qquad \forall i \in \{1, \dots N\}$$

PER QUESTO È ANCHE SUFF. MOSTRARE

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq (c_i - \varepsilon) \mu(A_i) \qquad \forall i \in \{1 \dots N\} \text{ E } \forall \varepsilon > 0$$

FISSIANO i, ε E OSSERVIANO CHE

$$A_i = \bigcup_n \{x \in A_i : f_n(x) > c_i - \varepsilon\}, \qquad F_n = \{x \in A_i : f_n > c_i - \varepsilon\}$$

$$\sup_n f_n(x) = f(x) \geq s(x) > c_i - \varepsilon \quad \forall x \in A_i$$

$$\sup_n \int_{A_i} f_n \geq \sup_n \int_{F_n} f_n \geq \sup_n \left((c_i - \varepsilon) \mu(F_n) \right) = (c_i - \varepsilon) \mu(A_i)$$

CONCLUDE LA DIMOSTRAZIONE.

DEFINIAMO L'INTEGRALE PER $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

OSSERVIAMO CHE $f \in \mathcal{M} \Rightarrow f^+, f^-: X \to [0, +\infty] \in \mathcal{M}$

SE $\int_X f^+ < +\infty$ O $\int_X f^- < +\infty$

DEFINIAMO $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^- \in \overline{\mathbb{R}}$

DEF: DATA $f: X \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{M}$,

f SI DICE INTEGRABILE SE $\int_X |f| = \int_X f^+ + \int_X f^- < +\infty$

E SI HA $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^- \in \mathbb{R}$.

TEOREMA: f, g INTEGRABILI $\Rightarrow$

- $f \pm g$ INTEGRABILE
- cf INTEGRABILE $\forall c \in \mathbb{R}$
- $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$ SE $A, B \in \mathcal{A}$, $A \cap B = \emptyset$

IN PARTICOLARE L'INSIEME $\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ INTEGRABILE} \}$

È UNO SPAZIO VETTORIALE.

OSS: SE $f=0$ q.o., CIOÈ $\mu(\{f\neq 0\})=0$,

ALLORA $\int_X c\cdot f=0 \quad \forall c\in\mathbb{R}$ $\qquad \int_X f+g=\int_X g \quad \forall g$

IN PART. POSSIAMO DEF. UNA RELAZIONE DI EQUIVALENZA SU $\mathcal{L}^1(X,\mu)$: $f\sim g \iff f-g=0$ q.o.

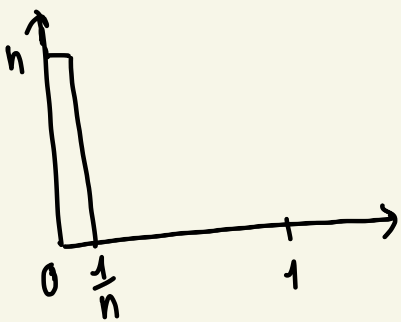
$L^1(X,\mu)=\mathcal{L}^1(X,\mu)/\sim$ È UNO SP. VETTORIALE

SU CUI È BEN DEFINITO $\int_X : L^1(X,\mu)\to\mathbb{R}$

LEMMA (FATOU)

$f_n \geq 0$ MISURABILI $\implies \liminf\limits_n \int_X f_n \geq \int_X \liminf\limits_n f_n$

ES:



$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$f_n(x) \to 0$

$\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$

$\liminf\limits_n \int f_n = 1 > 0$

DIM $\liminf_n f_n = \sup_n g_n$ DOVE $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$

$f_k \geq g_n \quad \forall k \geq n \quad , \quad g_{n+1} \geq g_n \ \forall n$

$$\int_X f_k \geq \int_X g_n \quad \forall k \geq n \Rightarrow \inf_{k \geq n} \int_X f_k \geq \int_X g_n$$

PRENDIAMO IL $\sup_n$ E OTTENIAMO

$$\liminf_n \int_X f_n \geq \sup_n \int_X g_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONV. MONOTONA}}}{=} \int_X \sup_n g_n = \int_X \liminf_n f_n$$

TEOREMA DI CONV. DOMINATA O DI LEBESGUE

$f_n : X \to \mathbb{R}$ MIS. $\quad f_n(x) \to f(x)$ PER QUASI OGNI $x \in X$

$\left(\exists Y \subseteq X,\ \mu(X \setminus Y) = 0 \text{ T.C. } f_n(x) \to f(x)\ \forall x \in Y \right)$

$|f_n| \leq g$ DOVE $g : X \to [0, +\infty)$ È INTEGRABILE

$$\Rightarrow \lim_n \int_X |f_n - f| = 0 \quad \left(\text{CIOÈ } f_n \to f \text{ IN } L^1\right)$$

IN PARTICOLARE $\displaystyle \lim_n \int_X f_n = \int_X f$.

OSS: L'IPOTESI $|f_n| \leq g$ È NECESSARIA, COME MOSTRA L'ESEMPIO DI PRIMA

DIM. $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$

$2g - |f_n - f| \geq 0$ APPLICHIAMO IL LEMMA DI FATOU

$$\int_X 2g = \int_X \liminf_n \left(2g - |f_n - f|\right) \leq \liminf_n \int_X 2g - |f_n - f|$$

$$= \int_X 2g - \limsup_n \int_X |f_n - f| \Rightarrow \limsup_n \int_X |f_n - f| \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_n \int_X |f_n - f| = 0 .$$

SI HA ANCHE

$$0 \leq \left| \int_X f_n - \int_X f \right| = \left| \int_X f_n - f \right| \leq \int_X |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \lim_n \int_X f_n = \int_X f .$$

PROPOSIZIONE

$\|f\|_{L^1} = \int_X |f|$ È UNA NORMA SU $L^1(X,\mu)$

(SEGUE SUBITO DA $|cf(x)| = |c| \cdot |f(x)|$ E
$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$)

PROPOSIZIONE

$\left(L^1(X,\mu), \|\cdot\|_{L^1}\right)$

È UNO SPAZIO DI BANACH

DIM UNA VOLTA VERIFICATO CHE $L^1(X,\mu)$

È UNO SPAZIO VETT. NORMATO,

DOBBIAMO VERIFICARE CHE È COMPLETO,

CIOÈ CHE $\forall \{f_n\}_n$ SUCC. DI CAUCHY IN L^1

$\exists f \in L^1$ T.C. $f_n \to f$ IN L^1.

$\forall k \in \mathbb{N}$ SIA $n_k \in \mathbb{N}$ T.C. $\|f_i - f_j\| \leq \frac{1}{4^k}$ $\forall i,j \geq n_k$

SIA $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left| f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x) \right| \geq 0$ MISURABILE

g È INTEGRABILE

$$\int_X g = \|g\| = \int_X \sum_{k=1}^{\infty} 2^k |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| = 2^k \sum_k \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|$$

CONV. MONOT.

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

IN PARTICOLARE $\tilde{\forall} x \in X \quad g(x) < +\infty$,

DOVE $\tilde{\forall}$ SI LEGGE "PER QUASI OGNI"

PRESO $x \in X$ T.C. $g(x) < +\infty$ SI HA

$$|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| \leq \frac{1}{2^k} g(x) < +\infty$$

$$|f_{n_\ell}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{i=\ell}^{j-1} |f_{n_i}(x) - f_{n_{i+1}}(x)| \quad \forall\, j > \ell \geq K$$

$$\leq g(x) \sum_{i=\ell}^{j-1} \frac{1}{2^i} \leq g(x) \sum_{i=K}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{K-1}} g(x)$$

$\Rightarrow f_{n_k}(x)$ È UNA SUCC. DI CAUCHY IN $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f_{n_k}(x) \xrightarrow[K]{} f(x)$ E $\|f_{n_k} - f\| \leq \frac{1}{2^{K-1}} \|g\|$

CIOÈ $f_{n_k} \to f$ IN L^1.

MA ALLORA ANCHE $f_n \to f$ IN L^1.

INFATTI $\forall \varepsilon \ \exists n_\varepsilon$ T.C. $\|f_i - f_j\| \leq \varepsilon \quad \forall i,j \geq n_\varepsilon$

ED $\exists k_\varepsilon$ T.C. $\|f_{n_\ell} - f\| \leq \varepsilon \quad \forall \ell \geq k_\varepsilon$

IN PART. SCEGLIENDO $j = n_\ell$ OTTENGO

$$\|f_i - f\| \leq \|f_i - f_{n_\ell}\| + \|f_{n_\ell} - f\| \leq 2\varepsilon \quad \forall i \geq \max\left(n_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\right).$$

RAGIONANDO COME SOPRA E

OSSERVANDO CHE $f_n \to f$ IN $L^1 \Rightarrow f_n$ DI CAUCHY

OTTENIAMO

COROLLARIO: $f_n \to f$ IN $L^1 \Rightarrow$

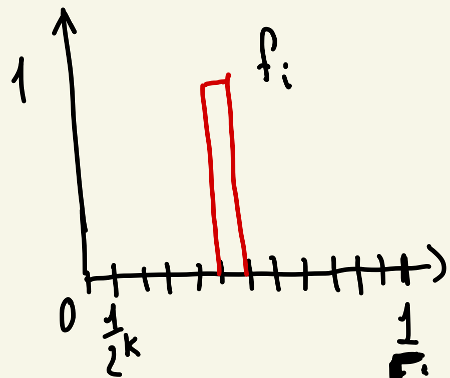
$\exists n_k$ T.C. $f_{n_k}(x) \to f(x)$ $\tilde{\forall} x$

E $\exists g \in L^1$, $g \geq 0$ T.C. $|f_{n_k}| \leq g$

OSS: È "UNA SPECIE" DI VICEVERSA DEL TEOREMA DI CONV. DOMINATA

NON È VERO CHE $f_n \to f$ IN $L^1 \Rightarrow f_n \to f$ q.o.

ES:



DATO $k \in \mathbb{N}$ E $2^k \leq i \leq 2^{k+1}-1$

DEFINIAMO

$$f_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[\frac{i-2^k}{2^k}, \frac{i-2^k+1}{2^k}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\|f_i\| = \int_0^1 f_i = \frac{1}{2^k} \to 0$, CIOÈ $f_i \to 0$ IN $L^1([0,1])$

$f_i(x) \not\to 0 \quad \forall x \in [0,1]$