Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$

$m(E) > 0$

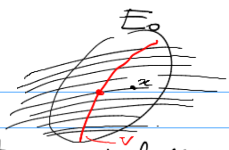
$\Rightarrow \exists V \subset E$ non misurabile

1) $\exists E_0,\ m(E_0) > 0$

$E_0 \subseteq [j_0, j_0+1]$

$E_0/\sim \ \xrightarrow{\varphi}\ E_0$ mappa di scelta

$V = \operatorname{Im}(\varphi)$ Rappr. delle classi di eq



Considero su E_0 la relazione $x \sim y$ sse $\underline{x - y \in \mathbb{Q}}$

$V \subset E_0$ un insieme che contiene esattamente un elemento per ogni classe non vuota

$$\boxed{E_0 \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} V+q}$$ ed è un unione disgiunta → segue dal ragionam classico

$x \in E_0 \quad \exists!\ v_x \in V : \quad x = v_x + q$ (con q razionale $|q| \leq 1$) $\Rightarrow x \in V+q$

$m(V+q) = m(V) \quad \forall q \quad$ (per inv per traslazioni)

$m(E_0) \leq \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} m(V+q)$

[Dimostrazione interrotta. (finisco prossima volta) dato per buono il risultato]

$$m(E_0) \leq m\Big(\bigcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| \leq 1}} V+q\Big) \leq \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| \leq 1}} m(V+q)$$

$m(V+q) = m(V)$

$\Rightarrow m(V) > 0$

Se V fosse misurabile $V+q$ lo sarebbe $\forall q \in \mathbb{Q}\ |q| \leq 1$

$\bigcup$ unione

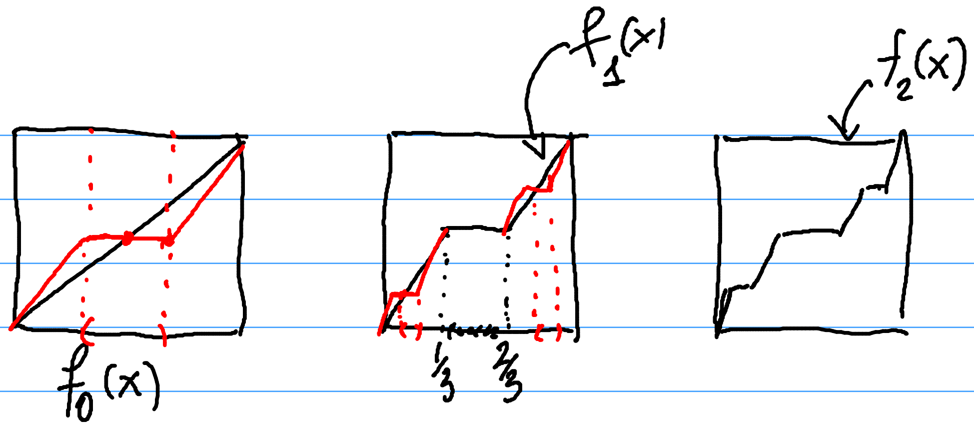
$\bigsqcup$ unione disgiunta

$$m\Big(\bigsqcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| \leq 1}} V+q\Big) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| \leq 1}} \underbrace{m(V+q)} = +\infty$$

$m(V) > 0$

$$\bigsqcup_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ |q| \leq 1}} V+q \subseteq [j_0 - 1, j_0 + 2]$$

$m\left(\bigsqcup V+q\right) \leq 3$ assurdo. ($\Rightarrow V$ non può essere misurabile)



.... $f_n(x)$

$f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in [0,1]$

Scala del diavolo
il limite è continuo

La convergenza è UNIFORME

$(f_n)_n$ succ. di funzioni

$f_n : X \longrightarrow E$

X insieme

$(E, |\cdot|_E)$ spazio di Banach

Def: $f_n \longrightarrow f$ puntualmente $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\boxed{\forall x \in X}$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : |f_n(x) - f(x)|_E < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n}$

$\forall x \in X \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

$f_n \longrightarrow f$ uniformemente $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} : |f_n(x) - f(x)|_E < \varepsilon \ \forall n \geq \bar{n} \ \boxed{\forall x \in X}$

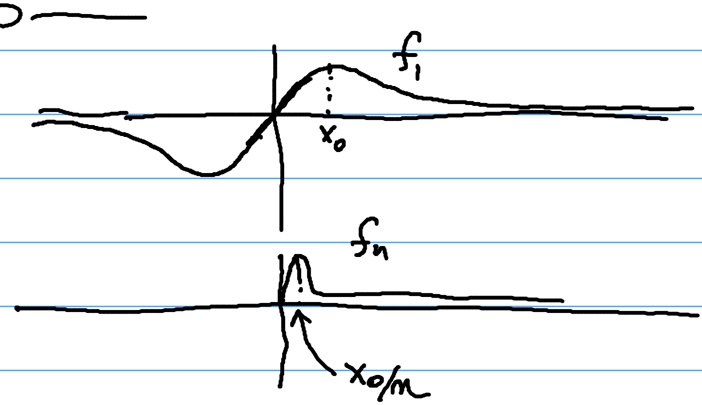
—— o ——

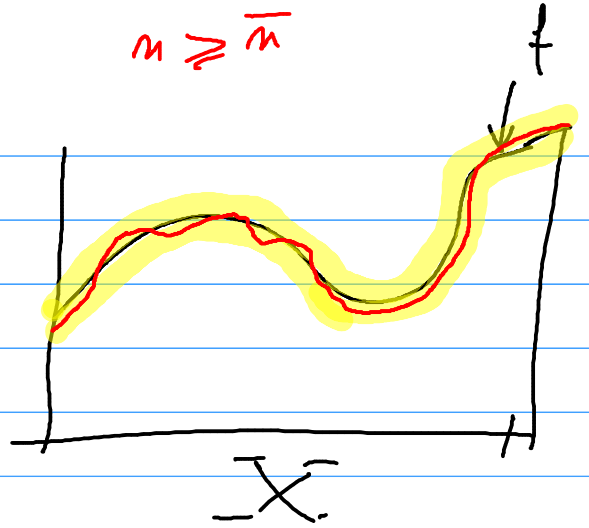
Esempio: $f_1(x) = x e^{-|x|}$

$n \geq 1 \quad f_n(x) = f_1(nx)$

$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

$f_n \longrightarrow 0$ uniformemente





<u>Oss</u>: Conv. uniforme vuol dire che $f_n \to f$ uniformemente

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \bar n : \ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad \forall n\geq \bar n \quad \forall x\in X$$

Nell'esempio questo non è vero

$f\equiv 0$ $\qquad \max_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}}|f_1(x)| = c_0>0$

Quindi basta prendere $0<\varepsilon<c_0$ per vedere che la condizione non è verificata

$\exists x_n : \ f_n(x_n)=c_0>\varepsilon$

X insieme

$(E,|\cdot|)$ sp. di Banach

$B(X,E)=\{f:X\to E, \ f \text{ limitata}\}$

↑ È uno spazio di Banach per la norma

$X\subseteq \mathbb{R}^l$

$E=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{R}^m$

casi interessanti

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

OSS$_1$: Questa è una norma su $B(X,E)$

i) Il sup è finito

ii) $\|f\|_\infty \geq 0$ e vale $0 \Leftrightarrow f \equiv 0$ ok

iii) $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$ $\quad \sup_{x\in X} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{x\in X} |f(x)|$ ✓

(iv) $\|f+g\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)+g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

$(B(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno $\underbrace{\text{sp normato} + \text{è completo*}}_{\text{BANACH}}$

* completo $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ogni successione di Cauchy converge.

Prop $(B(X,E), \|\cdot\|_\infty)$ è completo

Dim: sia $(f_n) \in B(X,E)$ successione di Cauchy per $\|\cdot\|_\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n, m \geq \bar{n} \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \qquad (*)$$

$(*) \Rightarrow \forall x \in X$ $\quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$
$\forall n, m \geq \bar{n}$

$(*) \Rightarrow \forall x \in X \quad (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ è successione di Cauchy in $(E, |\cdot|)$

sp. di Banach

$\forall x \in X \ \exists!\ f(x) : \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$

Limite puntuale

$\boxed{f \text{ è anche limite uniforme}}$

infatti $\varepsilon > 0$ fissato scelgo $\bar{n}$ come in $(*)$

Se $n, m > \bar{n}$ $\quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$

mando $m \to \infty$ $\quad \overset{*}{\Rightarrow} \quad \boxed{\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}}$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X$
$\forall n \geq \bar{n}$

$*$ $\forall \varepsilon > 0$ scelgo $\bar{n}$ come in $(*)$. $\forall x \in X$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\quad$ mando $m \to \infty$

$$|f_n(x)| - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X \quad \text{per la continuità di } |\cdot|_E$$

$$\| f_n(x) - f(x) \|_\infty \leq \varepsilon < 2\varepsilon$$

<u>OSS</u>: conv puntuale $\not\Longrightarrow$ conv. uniforme

conv puntuale $\Longleftarrow$ conv. uniforme

<u>Prop</u>: $x_0 \in X$ $\quad f_n : X \longrightarrow E$ $\quad (X, d)$

E Banach

$$\left. \begin{array}{l} (f_n) \text{ succ. di funzioni continue in } x_0 \\ f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente} \end{array} \right\} \Longrightarrow f \text{ è continua in } x_0$$

<u>Corollario</u>: Se $f_n : X \longrightarrow E$ continue in x_0

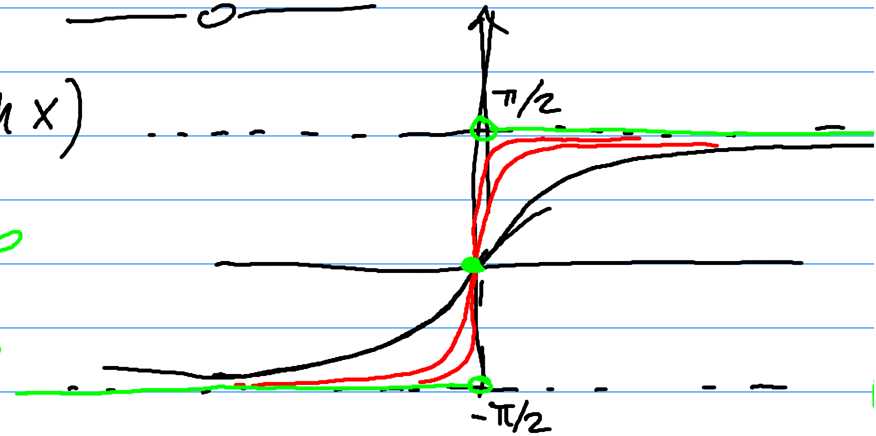
$f_n \longrightarrow f$ puntualmente e f non continua in x_0

$\Longrightarrow$ f_n <u>non</u> converge uniformemente

<u>Es</u>: $f_n(x) = \arctan(nx)$

$x_0 = 0$

$$\lim f_n(x) = f(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases}$$



f non è continua in $x_0 = 0$
$\Rightarrow f_n$ converge puntualmente ma non uniformemente

Dim (PROP): $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ scelgo $\bar{n}$: $\|f_{\bar{n}} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{\bar{n}}(x)| + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + |f_{\bar{n}}(x_0) - f(x_0)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

scelgo $\delta > 0$ in modo che $d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f_{\bar{n}}(x) - f_{\bar{n}}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
(per la cont. di $f_{\bar{n}}$ in x_0)

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ se $d(x, x_0) < \delta$

Corollario: $BC(X, E) = \{ f \in B(X, E) : f \text{ continua} \}$
è un sottospazio chiuso di $B(X, E)$.
$\Rightarrow$ È Banach

OSS: Se (X, d) è compatto $C(X, E) \subset B(X, E)$
è sottospazio chiuso

Esercizio: $C_0(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}) = \{ f \in C(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}) : \lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0 \}$ è sottosp. chiuso di $BC(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R})$ $\|\cdot\|_\infty$

In particolare anche $(C_0(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ è Banach.

— o —

<u>OSS</u>: (f_n) $\quad f_n : X \longrightarrow E$

$f_n|_{X_0}$ conv. uniformemente a f su $X_0 \subsetneq X$

$$\|f_n - f\|_{\infty, X_0} \longrightarrow 0$$

$$\sup_{x \in X_0} |f_n(x) - f(x)|$$

<u>Prop</u>: $f_n \in C([a,b], \mathbb{R}^m)$ $\qquad X = [a,b]$, $E = \mathbb{R}^m$

$f_n \longrightarrow f$ uniformemente su $[a,b]$

Allora $\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ (si integra componente per componente).

<u>Dim</u>: Dato che l'integrale si fa componente per componente

$$f_n = \left(f_n^{(1)}, \dots, f_n^{(m)}\right)$$

$$\int_a^b f_n(x)\,dx = \left(\int_a^b f_n^{(1)}(x)\,dx, \dots, \int_a^b f_n^{(m)}(x)\,dx\right)$$

Basta verificare l'enunciato per $m=1$

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \iff \left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

fissato $\varepsilon>0$ scelgo $\bar{n}$ tale $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall n \geq \bar{n}$

$$\left|\int_a^b (f_n(x)-f(x))\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{\cancel{b-a}}\cdot(\cancel{b-a}) \quad \forall n\geq \bar{n}$$

$\blacksquare$

<u>Prop</u>: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperto limitato, convesso

$f_n : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f_n \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$

$x_0 \in \Omega$ $\qquad$ t.c. $f_n(x_0) \longrightarrow y_0$ $\quad n \to \infty$

$\exists\, F \in C(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$: $\nabla f_n \longrightarrow F$ uniformemente

$\Longrightarrow \exists\, f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$: $f_n \to f$ uniformemente

e $\nabla f = F$

<u>Dim</u>: $$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_0^1 \nabla f_n(x_0 + t(x-x_0))\cdot(x-x_0)\,dt \quad \text{©}$$

Δ diametro di $\overline{\Omega}$
$\Rightarrow |x_0 - x| \leq \Delta$
$\forall x \in \overline{\Omega}$

Se $n \to +\infty$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ y_0 & + & \int_0^1 F(x_0+t(x-x_0))\cdot(x-x_0)\,dt \end{array}$$

$$\varphi(t) \doteq f_n(x_0+t(x-x_0))$$

$$\varphi'(t) = \nabla f_n(x_0+t(x-x_0))\cdot(x-x_0)$$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$$

Per il teorema visto prima

$$\nabla f_n \longrightarrow \nabla F$$

$$|(\nabla f_n(x_0+t(x-x_0)) - F(x_0+t(x-x_0)))(x-x_0)|$$

$$\wedge|$$

$$\|\nabla f_n - F\|_\infty |x-x_0| \leq \|\nabla f_n - F\|_\infty \cdot \Delta$$

$$f_n(x) \longrightarrow \boxed{f(x) \doteq y_0 + \int_0^1 F(x_0+t(x-x_0))\cdot(x-x_0)\,dt} \quad \otimes$$

e la conv. è uniforme su Ω in quanto

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - y_0| + \left|\int_0^1 \nabla f_n(x_0+t(x-x_0)) - F(x_0+t(x-x_0))\,(x-x_0)\,dt\right|$$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x_0) - y_0| + \|\nabla f_n - F\|_\infty \cdot \Delta$$

$$\downarrow n \to \infty$$

$$0$$

con una stima indipendente da $x \in \Omega$

<u>Esercizio</u>: Verificare che f definita da $\otimes$ è di classe C^1 e $\nabla f = F$