Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 3)

In fondo alla lista di esercizi proposti è presente un suggerimento per l'esercizio 1.

Esercizio 1

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$F(x.y) := xe^y - ye^x - 1.$$

Si ponga $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\}$.

(i) Provare che esistono due funzioni $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $h : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che M sia uguale all'unione dei grafici di h e g, ossia:

$$M = \{(x, g(x)) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, h(x)) : x \in (0, +\infty)\}.$$

(ii) Dimostrare che i grafici di g e h non si intersecano in alcun punto.

(iii) Provare che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $h \in C^\infty((0, +\infty))$.

(iv) Rappresentare qualitativamente i grafici di g e h. In particolare:

  (a) individuare gli eventuali zeri di g e h e l'intersezione del grafico di g con l'asse delle ordinate;

  (b) studiare gli intervalli di monotonia di g e h.

  (c) dimostrare che

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to0^+} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty.$$

(v) Determinare (se esiste) la retta tangente a M passante per $(1, 0)$.

(vi) Discutere la convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2} \right)^n .$$

Esercizio 2

Siano X uno spazio topologico non vuoto e Y uno spazio topologico di Hausdorff non vuoto. Siano $A \subseteq X$, $x_0 \in X$ un punto di accumulazione per A e $f : A \to Y$ una funzione. Si supponga che $A = \cup_{1 \leq i \leq m} A_i$, dove m è un intero positivo e $A_1, \ldots, A_m \subseteq A$ sono tali che x_0 sia punto di accumulazione per A_i per ogni $1 \leq i \leq m$. Fissato $l \in Y$, dimostrare che:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A}} f(x) = l \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in A_i}} f(x) = l \quad \forall 1 \leq i \leq m.$$

Esercizio 3

Si verifichi che il sistema

$$\begin{cases} e^z + 3x - \cos(y) + y = 0 \\ e^x - x - z + y - 1 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

definisce implicitamente in un intorno di $p := (0,0,0)$ una curva in $\mathbb{R}^3$ regolare e di classe C^∞. In altri termini, provare che esiste una funzione $\psi \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon); \mathbb{R}^3)$ (per qualche $\varepsilon > 0$) tale che $\psi(0) = p$, $|\psi'(t)| \neq 0$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e tale che le sue componenti $x(t) := \psi^1(t), y(t) := \psi^2(t), z(t) := \psi^3(t)$ soddisfino il sistema (1) per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Provare inoltre che ψ può essere definita in modo che $x(t) := t$ per ogni $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Si scrivano inoltre le equazioni della retta tangente e del piano normale a tale curva nel punto p.

Esercizio 4

In un riferimento cartesiano ortogonale nello spazio euclideo, sia γ il luogo geometrico definito in coordinate da:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}.$$

Si determinino (se esistono) i punti di γ aventi quota minima e massima.

Suggerimento per (ii) (Esercizio 1)

Dimostrare che $g(x) < x - \ln(x) < h(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.