ANALISI 2

LEZIONE 13

M. NOVAGA

OPERATORI DI COMPOSIZIONE

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA

$$\boxed{T(u) = f(x, u(x))}$$

DOVE

$f : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ TALE CHE

- $f(\cdot, t)$ MISURABILE $\forall t \in \mathbb{R}$
- $f(x, \cdot)$ CONTINUA $\tilde{\forall} x \in X$ ($\tilde{\forall}$ = " PER QUASI OGNI")
- $\exists\, k : X \to [0, +\infty)$, $\int_X k < +\infty$, $\exists\, C > 0$ T.C.

$$|f(x,t)| \leq k(x) + C|t|$$

PROP: $T : L^1(X) \to L^1(X)$ CON CONTINUITÀ.

DIM:

1 VEDIAMO CHE $f(x,u)$ È MISURABILE

- $u = c \cdot \chi_E$ $\quad f(x,u) = \chi_{X \setminus E} \cdot f(x,0) + \chi_E f(x,c)$

  $E \in \mathcal{A}$ $\quad$ MISURABILE

- $u = s$ SEMPLICE $\quad s = \sum c_i \chi_{A_i}$ $\quad$ POSSO SUPPORRE A_i PARTIZIONE (FINITA) DI X

$$f = \sum_i f(x, c_i) \chi_{A_i} \quad \text{MISURABILE}$$

- u mis., $u \geq 0$ $\quad u = \lim_n s_n$ $\quad s_n$ SEMPLICI

$\Rightarrow f(x,u) = \lim_n f(x, s_n)$ MISURABILE

2. $u \in L^1 \Rightarrow f(x,u) \in L^1(X)$

$$|f(x,u)| \leq h(x) + C|u|$$

$$\int_X |f(x,u)| \leq \int_X h + C \int_X |u| < +\infty$$

3. $u \xrightarrow[T]{} f(x,u)$ È CONTINUA IN $L^1(X)$

SIA $u_n \to u$ IN $L^1 \Rightarrow$

$\exists\, n_k$ T.C. $u_{n_k} \xrightarrow{(x)} u(x)$ $\tilde{\forall} x \in X$ E $|u_{n_k}(x)| \leq g(x) \in L^1$

$$\Rightarrow \quad f(x, u_{n_k}(x)) \to f(x, u(x)) \quad \tilde{\forall} x$$

E $|f(x, u_{n_k}(x))| \leq h(x) + C|u_{n_k}| \leq \underbrace{h(x) + C g(x)}_{\in L^1}$

$$\Rightarrow f(x, u_{n_k}(x)) \xrightarrow[L^1]{} f(x,u)$$

TH C.D.

POTENDO APPLICARE L'ARGOMENTO A OGNI SOTTOSUCC. DI u_n, OTTENGO $f(x, u_n) \xrightarrow[n]{} f(x,u)$ IN $L^1(X)$, CIOÈ

T È CONTINUO

SPAZI PRODOTTO E MISURE PRODOTTO

RICORDIAMO CHE, DATO $(X, \mathcal{A}, \mu)$,

- μ È FINITA SE $\mu(X) < +\infty$
- μ È σ-FINITA SE $X = \bigcup_i^\infty A_i$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\mu(A_i) < +\infty$

  [ESEMPIO: MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$]

- $E \subseteq X$ È σ-FINITO SE $E \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $\mu(A_i) < +\infty$

SIANO $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ DUE SPAZI DI MISURA

$X \times Y$ PRODOTTO CARTESIANO

$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ = σ-ALGEBRA GENERATA DAI
"RETTANGOLI" $E \times F$, $E \in \mathcal{A}$, $F \in \mathcal{B}$

$\mu \times \nu$, MISURA PRODOTTO, È UNA MISURA SU
$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ T.C. $\mu \times \nu (E \times F) = \mu(E) \cdot \nu(F)$

OSS: IN GENERALE PUÒ NON ESSERE UNICA

COSTRUZIONE: $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \times F_i$, $E_i \times F_i \cap E_j \times F_j = \emptyset$ SE $i \neq j$

DEFINIAMO:

- $\mu \times \nu (G) = \sum_i \mu \times \nu (E_i \times F_i) = \sum_i \mu(E_i) \cdot \nu(F_i)$
- $(\mu \times \nu)^*(A) = \inf \{ \mu \times \nu (G) : A \subseteq G = \bigcup_i E_i \times F_i \}$

QUESTA È UNA MISURA ESTERNA T.C.
LA σ-ALGEBRA $\mathcal{M}$ DEI MISURABILI CONTIENE $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$
(IN GENERALE $\mathcal{M} \supsetneq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$)

$(\mu \times \nu)^* \big|_{\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}}$ È UNA MISURA PRODOTTO

OSS: IN GENERALE $\mu \times \nu$ NON È COMPLETA

MENTRE $(\mu \times \nu)^{*}\big|_{\mathcal{M}}$ LO È ED È IL COMPLETAMENTO DI $\mu \times \nu$

PROP: SE $(X, \mathcal{A}, \mu)$ E $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ SONO σ-FINITI

$\Rightarrow \mu \times \nu$ È UNICA

[NO DIM.]

ESEMPIO: $\mathcal{L}^n$ MIS. DI LEB. IN $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \quad \text{E} \quad \mathcal{L}^n = \mathcal{L}^m \times \mathcal{L}^{n-m}$$

IN QUESTO CASO SI HA

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n-m})$$

MA $\quad \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \supsetneq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{M}(\mathbb{R}^{n-m})$

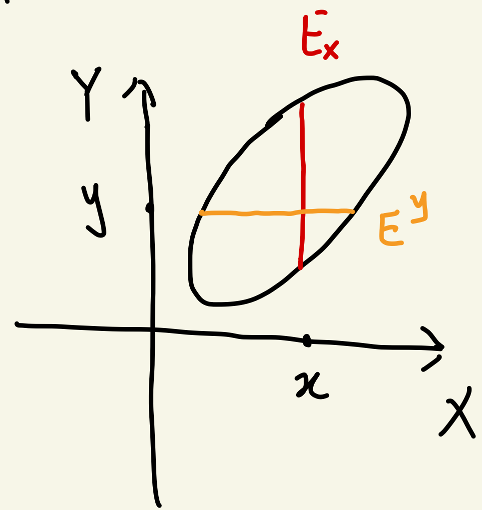
ES: $E \times F$ CON $\mathcal{L}^m(E) = 0$ E F NON MISURAB.

SEZIONI

- $E \subseteq X \times Y$

  $x \in X, \quad E_x = \{ y \in Y : (x,y) \in E \} \subseteq Y$

  $y \in Y, \quad E^y = \{ x \in X : (x,y) \in E \} \subseteq X$



- $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ mis

  $f_x : Y \to \mathbb{R}, \quad f_x(y) = f(x,y)$

  $f^y : X \to \mathbb{R}, \quad f^y(x) = f(x,y)$

PROP: $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \Rightarrow E_x \in \mathcal{B} \ \forall x$ E $E^y \in \mathcal{A} \ \forall y$

f mis $\Rightarrow$ f_x mis $\forall x$ E f^y mis $\forall y$

DIM: MOSTRIAMO SOLO LA PRIMA AFFERMAZIONE.

BASTA OSSERVARE CHE LA PROPRIETÀ È VERA

PER $E = A \times B$, $E_x \in \{\emptyset, B\} \ \forall x$, $E^y \in \{\emptyset, A\} \ \forall y$

E CHE GLI INSIEMI E CHE VERIFICANO LA

PROPRIETÀ SONO UNA σ-ALGEBRA,

MA ALLORA SONO $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

OSS: SE CONSIDERIAMO IL "COMPLETAMENTO"

$$\overline{\mu \times \nu} = (\mu \times \nu)^* \Big|_{\mathcal{M}}$$ ALLORA

LA PROP. È VERA $\tilde{\forall} x \in X$ E $\tilde{\forall} y \in Y$

DOMANDA: COME È LEGATA $\mu \times \nu(E)$

A $\mu(E^y)$ E $\nu(E_x)$?

PROP: μ, ν SONO σ-FINITE, $E \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $x \to \nu(E_x)$ E $y \to \mu(E^y)$ SONO MISURABILI

E SI HA $\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x)\, d\mu = \int_Y \mu(E^y)\, d\nu$

CIOÈ $\int_E d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_{E_x} d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_{E^y} d\mu \right) d\nu$

DIM. SUPP. μ, ν FINITE

$\mathcal{P} = \{ E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} : E$ VERIFICA LA TESI $\}$

È UNA σ-ALG. CHE CONTIENE I RETTANGOLI,

INFATTI:

- $\mathcal{P}$ CONTIENE I RETTANGOLI
- $\mathcal{P}$ CONTIENE LE $\cap$ E $\cup$ FINITE DI RETTANGOLI
- $\mathcal{P}$ CONTIENE LE $\cup$ NUMERABILI CRESCENTI
  [SERVE, μ, ν SIANO FINITE E SI USA TH. CONV. MONOT]
- $\mathcal{P}$ CONTIENE TUTTE LE $\cup$ E $\cap$ NUM. $\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ σ-ALGEBRA

ESEMPIO: $X = Y = [0,1]$ $\quad X \times Y = [0,1] \times [0,1]$

$\mu = \mathcal{L}$ LEB. $\quad \nu(E) = \# E$

È σ-FINITA $\quad$ NON È σ-FINITA

$$E = \{ (x,x) : x \in [0,1] \}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 E_x \, d\nu \, d\mu = \int_0^1 1 \, d\mu = 1$$

$$\neq$$

$$\int_0^1 \int_0^1 E^y \, d\mu \, d\nu = \int_0^1 0 \, d\nu = 0$$

SI HA ANCHE $\mu \times \nu (E) = +\infty$.

$\mathcal{P} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

μ, ν SONO σ-FINITE

$X = \bigcup X_i \quad \mu(X_i) < +\infty, \quad Y = \bigcup Y_i \quad , \nu(Y_i) < +\infty,$

$X_i \subseteq X_{i+1}, \quad Y_i \subseteq Y_{i+1}$

$X \times Y = \bigcup X_i \times Y_i$

$E \subseteq X \times Y, \quad E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$$(\mu \times \nu)(E) = \lim_i (\mu \times \nu)(E \cap (X_i \times Y_i))$$

$$= \lim_i \int_{X_i} \nu(E_x \cap Y_i) \underset{\text{CONV. MON.}}{=} \int_X \nu(E_x).$$

E LO STESSO PER L'ALTRO INTEGRALE

TEOREMA (FUBINI-TONELLI)

$f \in L^1(X \times Y) \Rightarrow f_x \in L^1(Y)\ \tilde{\forall} x$ E $f^y \in L^1(X)\ \tilde{\forall} y$

$x \to \int_Y f_x \, d\nu \in L^1(X)$, $y \to \int_X f^y \, d\mu \in L^1(Y)$ E

$$\int f \, d(\mu \times \nu) = \int_X \int_Y f_x \, d\nu \, d\mu = \int_Y \int_X f^y \, d\mu \, d\nu .$$

DIM $f = \chi_E$ È LA PROP. PRECEDENTE

$f = s = \sum_{i=1}^N c_i \chi_{E_i}$ PER LINEARITÀ DI $\int$

$f \geq 0$, $f = \sup s_n$ $s_n \leq s_{n+1}$ SEMPLICI

$\Rightarrow$ OK PER TH CONV. MONOTONA (NON SERVE $\int f < +\infty$)

IN GENERALE $f = f^+ - f^-$ SI APPLICA A f^+ E f^-.

OSS: IL TEOREMA VALE PER $f \geq 0$ MISURABILE ANCHE CON $\int f = +\infty \Rightarrow$ SI PUÒ USARE, APPLICATO A $|f|$, PER VERIFICARE CHE $f \in L^1$

OSS: SE CONSIDERIAMO $\overline{\mu \times \nu}$ E $E \in \mathcal{M}_{\overline{\mu \times \nu}} \supseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ IL TEOREMA È ANCORA VALIDO, CON L'ATTENZIONE CHE $\int_Y f_x$ E $\int_X f^y$ SONO DEF. SOLO Q.O.