26 nov 2020

da lez 20 nov 2020

da fare

Prop: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^\ell$ aperto limitato, convesso

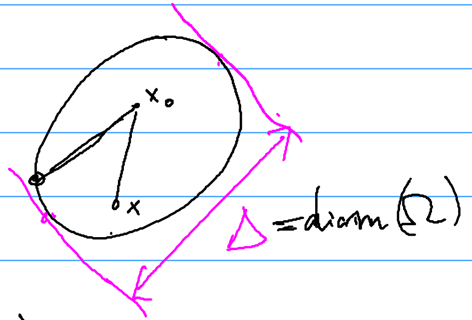
$f_n : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$

$x_0 \in \Omega$ t.c. $f_n(x_0) \to y_0$ $\quad n \to \infty$

$\exists F \in C(\Omega, \mathbb{R}^\ell)$: $\nabla f_n \to F$ uniformemente

$\Longrightarrow \exists f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$: $f_n \to f$ uniformemente

e $\nabla f = F$



$$f_n(x) \longrightarrow \underbrace{y_0}_{f(x_0)} + \int_0^1 F(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x - x_0)\, dt \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

oss: $y_0 = f(x_0)$

se $x_1 \in \Omega$

$$f_n(x) \to f(x) = f(x_1) + \int_0^1 F(x_1 + t(x-x_1)) \cdot (x - x_1)\, dt$$

$$\omega(x) \doteq f(x) - f(x_1) - F(x_1)(x - x_1) = o(|x - x_1|) \text{ per } x \to x_1$$

$\leftarrow$ per vedere che f diff e $\nabla f = F$

$$\omega(x) = \left[\int_0^1 F(x_1 + t(x-x_1))\, dt - F(x_1) \right] (x - x_1)$$

$$|\omega(x)| \le \underbrace{\int_0^1 |F(\overbrace{x_1 + t(x-x_1)}^{u_t}) - F(x_1)|\, dt}_{\text{è } o(1) \text{ per } x \to x_1} \cdot |x - x_1|$$

perché $\omega(x) = o(|x - x_1|)$ per $x \to x_1$

Cont. di F in x_1 : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$: $|u - x_1| < \delta \Longrightarrow |F(u) - F(x_1)| < \varepsilon$

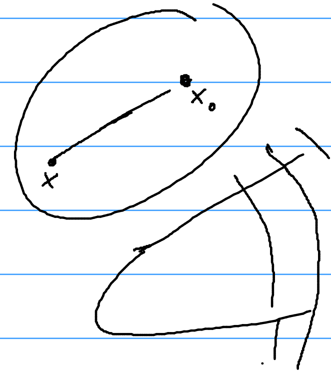
$|F(u_t) - F(x_1)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0,1]$ se $|x - x_1| < \delta$

$|u_t - x_1| = t|x - x_1| \le t\delta \le \delta$

$$\int_0^1 |F(u_t) - F(x_1)|\, dt < \varepsilon \Longrightarrow \int_0^1 F(u_t) - F(x_1)\, dt = o(1)$$

Oss: Qui abbiamo assunto Ω aperto
~~limitato~~
~~convesso~~

ho conv. uniforme sui limitati



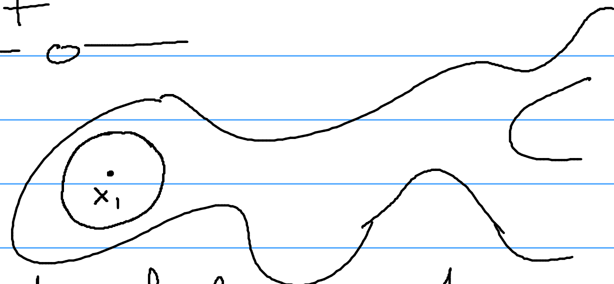
<u>Prop</u>: Se $f_n \longrightarrow f$ puntualmente su Ω aperto

$\nabla f_n \longrightarrow F$ uniformemente su Ω

$\Rightarrow$ f è di classe C^1 e $\nabla f = F$

<u>Dim</u> Dato $x_1 \in \Omega$ scelgo $r > 0$

$\overline{B(x_1, r)} \subset \Omega$



applico il teorema precedente per concludere che $f\big|_{B(x_1,r)} \in C^1$

e $\nabla f(x) = F(x)$

$\forall x \in B(x_1, r)$

Prop: Ω limitato $\quad f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{funz diff in } \Omega \text{ con } \nabla f \text{ continuo} \\ \text{estendibile a } \partial\Omega \end{array} \right.$

$\|f\|_{C^1(\overline{\Omega})} \doteq \|f\|_\infty + \|\nabla f\|_\infty$

$\left(C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}), \| \ \|_{C^1} \right)$ è uno spazio di Banach

$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

Dim: Se f_n è di Cauchy per $\| \ \|_{C^1}$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} f_n \text{ di Cauchy per } \| \ \|_\infty \\ \frac{\partial}{\partial x_i} f_n \text{ di Cauchy per } \| \ \|_\infty \ \forall i \end{cases}$

$\exists f \in C(\bar{\Omega})$: $\Rightarrow f_n \to f$ uniformemente; $\exists F_i \in C(\bar{\Omega})$: $\frac{\partial}{\partial x_i} f_n \xrightarrow[\text{uniform.}]{} F_i$

$F \doteq (F_1, \dots, F_d)$ $\nabla f_n \xrightarrow[\text{uniform}]{} F$

E per il risultato precedente

$$f \in C^1(\bar{\Omega}) \quad e \quad \nabla f = F$$

$$E \quad \|f_n - f\|_\infty \to 0 \quad \|\nabla f_n - \nabla f\|_\infty \to 0 \quad \Rightarrow \|f_n - f\|_{C^1} \to 0$$

$\boxed{\text{LINGUAGGIO delle SERIE}}$

$$(*) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \qquad x \in X$$

$$u_k : X \to E \quad \text{Banach}$$

$S_0(x) = u_0(x)$

$S_1(x) = u_0(x) + u_1(x)$

$\vdots$

$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_{n-1}(x)$

Dico che la serie $(*)$ converge puntualmente su X se $\exists S : X \to E$ t.c.

$$S_n(x) \to S(x) \quad \forall x \in X$$

la serie $(*)$ converge uniformemente se $\sup_{x \in X} |S_n(x) - S(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Cor: Se (X,d) sp. metrico $u_k : X \longrightarrow E$ continue $\forall k$

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ converge uniformemente a S $\Rightarrow$ S è continua

Dim: $S_n(x)$ continue perché somma di continue

conv. unif a S $\Rightarrow$ S continua

Cor: $u_k \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$ $\quad \sum u_k$ conv. uniformemente

allora $\displaystyle\int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx$

Dim: Posto $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$ $\qquad \displaystyle\int_a^b S_n(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(x)$

$S_n \to \sum_{k=0}^{\infty}$ uniformemente $\qquad \downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$

$\displaystyle\int_a^b \sum u_k(x)\,dx \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b u_k(x)$

— o —

Cor: Se Ω aperto conv. limitato $\quad \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x_0)$ converge

$x_0 \in \Omega$

$u_k \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ $\forall k$ $\qquad \sum_{k=0}^{+\infty} \nabla u_k(x)$ converge uniformemente

$\Rightarrow \exists\, S \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ tale che $\quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \quad$ e $\quad \nabla S = \sum_{k=0}^{+\infty} \nabla u_k(x)$

Dim: Passando alle somme parziali

$(E, \|\cdot\|)$ Banach

Def: $u_k : X \longrightarrow E$

$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ è totalmente convergente se $\exists\, M_k \in \mathbb{R}_+$ t.c.
$$\begin{cases} \sup_{x\in X} |u_k(x)| \leq M_k \\ \sum_{k=0}^{+\infty} M_k < +\infty \end{cases}$$

Prop: Se $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ è totalmente convergente $\Longrightarrow$ è uniformemente conv.

Dim: $S_m(x) \doteq \sum_{k=0}^{m} u_k(x)$ $\qquad S_n \in B(X, E)$

S_n è di Cauchy. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{n}$ t.c. $\sum_{k=\bar{m}}^{+\infty} M_k < \varepsilon$

$m+\ell > m \geq \bar{n}$ $\quad |S_{m+\ell}(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{m+1}^{m+\ell} u_k(x)\right| \leq \sum_{m+1}^{m+\ell} M_k \leq \sum_{k=m}^{+\infty} M_k < \varepsilon$

$\forall x \in X$

$\sup_X |S_{m+\ell} - S_m| < \varepsilon \qquad \bar{n} < m < m+\ell$

$\Longrightarrow S_n$ di Cauchy

$S_n \longrightarrow S$ uniformemente

— o —

Esempi: $\sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{k^2}\cos(kx)}_{u_k(x)}$ è uniformemente conv. su $\mathbb{R}$

$|u_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$; $\sum \frac{1}{k^2} < +\infty$

La serie conv. totalmente $\Longrightarrow$ conv. uniformemente

Oss: Una serie può convergere uniformemente ma non totalmente

$u_k \in C([0,1], \mathbb{R})$ $\qquad u_k(x) = (-1)^k \frac{1}{k}$ $\qquad \|u_k\|_\infty = \frac{1}{k}$

$\sum u_k$ non converge totalmente ma conv. uniformemente

— o —

Esercizio: $u_n(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x^n \log x & x \in (0,1] \end{cases}$ $\qquad u_n \in C([0,1], \mathbb{R})$

(i) mostrare che $u_n \to 0$ uniformemente

(ii) mostrare che $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ conv. uniformemente

(iii) dire se $\sum$ conv. totalmente

(iv) Calcolare $\int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx$

— o —

Es: $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} \cos(kx)$ $\qquad$ mostrare che è convergente e definisce una funz. di classe C^∞

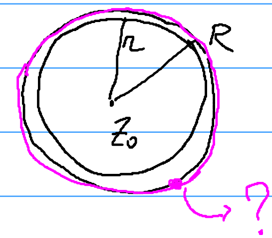
SERIE DI POTENZE

(*) $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$ $\quad c_k \in \mathbb{C}\ \forall k$, $z \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad$ serie di potenze di centro z_0

TEOR 1: $\exists R \in [0,+\infty]$ t.c. la serie (*)

(i) non converge $|z-z_0|>R$

(ii) converge assolutamente $|z-z_0|<R$

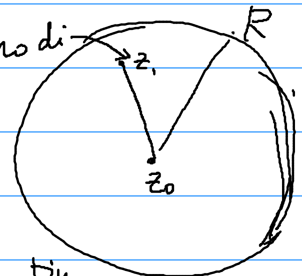


$$\boxed{R = 1/L \quad \text{con} \quad L = \limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}}$$ ← ?

TEOR 2: Se R è il RdCV della serie (*), e se $0<r<R$ allora la serie converge totalmente ($\Rightarrow$ uniformemente) su $\overline{B(z_0,r)} = \{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|\le r\}$

COR: Se R è il RdCV della serie (*), posto $F(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ $(|z-z_0|<R)$ F è una funzione continua su $B_R(z_0)$.

Dim (COR): fisso $z_1 \in B_R(z_0)$ Scelgo $|z_1-z_0|<r<R$, $B(z_0,r)$ è un intorno di z_1



$S_n = \sum_{k=0}^{n} c_k (z-z_0)^k$ è una succ di funz continue conv. uniformemente su $B(z_0,r)$ (x Teor 2) $\Rightarrow$ il limite è continuo in z_1

$(z_0 = 0)$

Esempi

- $\sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ $\quad R = 1 \quad$ conv. $\overline{B(0,1)} \setminus \{1\}$

- $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k}$ $\quad R = 1$

- $\sum_{k=0}^{+\infty} k z^k$ $\quad R = 1$

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^k$ $\quad R = +\infty$

$\sum_{k=0}^{+\infty} k! \, z^k$ $\quad R = 0 \quad$ converge solo in $z = 0$

- $\sum k! \, z^{(k!)}$ $\quad \boxed{R = ?}$ $\quad$ x eser (spoiler alert $R = 1$)

- $\sum_{k=0}^{+\infty} k! \, z^{(k^2)}$

—o—

Spg prendo $z_0 = 0$

$\boxed{\text{Promemoria}}$ $\quad \limsup_{n \to +\infty} a_n \doteq \inf_{n \in \mathbb{N}} \boxed{\underbrace{\sup_{k \geq n} a_k}_{\beta_n}} \quad \left(= \lim_{n \to \infty} \beta_n \right)$ $\quad \beta_n \searrow$

(P1) Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = L \implies \limsup_{n \to +\infty} a_n = L$

(P2) Se $\lim_{n \to \infty} a_n = L > 0 \implies \limsup_{n \to +\infty} a_n b_n = L \cdot \limsup_{n \to +\infty} b_n$

$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ldots$

(P3) $L = \limsup_{n \to \infty} a_n$ sse

(i) $\forall \ell > L \quad a_n < \ell$ definitivamente

(ii) $\forall \ell < L \quad a_n > \ell$ frequentemente

$\hookrightarrow \exists J \subseteq \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \in J$ vale la proprietà...
$\sup J = +\infty$

Dim: $\boxed{(z_0 = 0) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k \text{ conv totalmente } B(0,r) \text{ se } 0 < r < 1/L}$

Fisso $0 < r < \frac{1}{L}$ scelgo $\ell : L < \ell < \frac{1}{r}$ $\qquad L = \limsup_{n \to \infty} |c_n|^{1/n}$

(i) $\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad |c_n|^{1/n} < \ell \quad \forall n \geq n_0$ $\qquad \ell r < 1$

se $|z| \leq r$, $n \geq n_0$ $\qquad |c_n z^n| = \left(|c_n|^{1/n} |z|\right)^n \leq (\ell r)^n$ $\leftarrow$ sommabile

$\Longrightarrow$ La serie è totalmente convergente

<u>Lemma</u> A: $\forall \ell \in \mathbb{N}$ ~~~~ $\ell \in \mathbb{Z}$ le serie $\sum_{k=0}^{+\infty} k^\ell c_k z^k$ ($k=1$) hanno lo stesso raggio di Conv.

<u>Dim</u> $\limsup_{n \to \infty} \left(n^\ell |c_n|\right)^{1/n} = \limsup_{n \to +\infty} \left(n^{1/n}\right)^\ell |c_n|^{1/n} = \underline{1 \cdot \limsup |c_n|^{1/n}}$ $\leftarrow$ non dipende da ℓ

$\lim_{n \to \infty} \left(n^{1/n}\right)^\ell = 1$

Esercizio$_1$: Mostrare $F(z) \doteq \sum c_k z^k$ con RdCV $R\ (>0)$

$\forall\, 0<r<R$ $\quad F$ è M-Lip su $B(0,r)$

con $M = \sum_{k=0}^{+\infty} k|c_k| r^{k-1}$

—o—

Es$_2$: tutti i ragionamenti si possono ripetere per serie tipo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k A^k \qquad \text{con } A \in \underbrace{\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)}$$

$$\|A\|_2^2 = \operatorname{tr}({}^tA\cdot A)$$

$$\cancel{z \in \mathbb{C}} \qquad A \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n\times n)$$