Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Foglio di esercizi n.ro 2 del 29/11/2020

1. Sia B un insieme infinito, e siano $p, q \in B$, $p \neq q$. Sia $\tau \subseteq \mathcal{P}(B)$ il seguente sottoinsieme delle parti di B: $A \in \tau$ se $A \subseteq B \setminus \{p, q\}$, oppure se $A = B \setminus \{p\}$, $A = B \setminus \{q\}$, $A = B$.
(1) Si dimostri che τ è una topologia su B.
(2) Si esibiscano due sottospazi compatti K_1, K_2 si B tali che $K_1 \cap K_2$ non sia compatto.
(3) Si dica se (B, τ) sia T_1, e se sia T_2.

2. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano K_1, K_2 sottospazi compatti di X. Si mostri che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

3. Sia X uno spazio topologico. Si mostri che X verifica l'assioma di separazione T_3 se e solo se ogni punto di X possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.

4. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Si mostri che se $x \in X$ ammette un intorno compatto, allora ammette un sistema fondamentale di intorni compatti.

5. Sia $X = \mathbb{R}^2$, dotato della distanza $d \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $d(x, y) = \|x - y\|$ se x, y sono linearmente dipendenti; $d(x, y) = \|x\| + \|y\|$ se x, y sono linearmente indipendenti. (Tale metrica si chiama la metrica della rete ferroviaria francese; sapreste spiegare perché?).
(1) Si dica quali punti di X ammettono un intorno compatto.
(2) Si esibisca un chiuso limitato di $C \subseteq X$ che non è compatto.
(3) Si dica se la topologia di X sia più fine, meno fine o non comparabile con la topologia Euclidea.
(4) Al variare di $x \in X$, si determini il numero di componenti connesse di $X \setminus \{x\}$.
(5) Si mostri che, se $f \colon X \to X$ è un omeomorfismo, allora $f(0) = 0$ (suggerimento: si usi il punto precedente).

6. Uno spazio topologico X si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti $x, x' \in X$ esiste un omeomorfismo $f \colon X \to X$ tale che $f(x) = x'$.
(1) Si mostri che S^1 è omogeneo.
(2) Si mostri che S^n è omogeneo per ogni $n \geq 2$ (suggerimento: si sfrutti $O(n + 1)$).
(3) Si mostri che $(0, 1)$ è omogeneo.
(4) Si mostri che $[0, 1]$ non è omogeneo.

7. Sia $f \colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici.

(1) Si assuma che Y sia di Hausdorff. Si mostri che, se f è continua, allora il grafico di f è un chiuso di $X \times Y$.
(2) Si supponga che Y sia compatto. Si mostri che la proiezione $\pi\colon X \times Y \to X$ sul primo fattore è chiusa.
(3) Si supponga che Y sia compatto e di Hausdorff. Si mostri che f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso.

8. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $f(x,y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $r_a \subseteq \mathbb{R}^2$ la retta di equazione $y = ax$. Si determini:

(1) Per quali valori di a l'insieme $f(r_a)$ è denso in $S^1 \times S^1$.
(2) Per quali valori di a il sottospazio $f(r_a) \subseteq S^1 \times S^1$ è compatto.

Per lo svolgimento dell'esercizio, si può assumere (o dimostrare!) il seguente fatto: se $a \in \mathbb{R}$ è irrazionale, allora l'insieme delle parti frazionarie dei valori an, $n \in \mathbb{Z}$, è denso in $[0,1]$. La parte frazionaria di un numero reale x è la differenza tra x e la sua parte intera (ed appartiene perciò a $[0,1)$).

9. Sia X uno spazio topologico metrizzabile separabile, e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme discreto (non necessariamente chiuso). Si mostri che D è al più numerabile.

10.

(1) Siano X uno spazio topologico, e $\mathcal{B}$ una base delle topologia di X. Si mostri che X è I-numerabile se e solo se ogni punto $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile e costituito da elementi di $\mathcal{B}$.
(2) Sia
$$X = [0,1]^{[0,1]} = \prod_{x\in[0,1]} [0,1]$$
l'insieme delle funzioni $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dotato della topologia prodotto, e $Y \subseteq X$ il sottospazio dato dalle funzioni a supporto numerabile (ricordiamo che il supporto di una tale f è l'insieme degli $x \in [0,1]$ tali che $f(x) \neq 0$). Si mostri che Y non è I-numerabile.

11. Sia X uno spazio di Hausdorff compatto, e sia C_n, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia di chiusi non vuoti tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $C_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(1) Si mostri che se C_n è connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso.
(2) È vero che se C_n è connesso per archi per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso per archi?

12. Sia X uno spazio topologico connesso, e sia $f\colon X \to \mathbb{R}$ una funzione localmente costante, ovvero supponiamo che per ogni $p \in X$ esista un intorno U_p di p in X tale che $f|_{U_p}$ sia costante. Si mostri che f è costante.

13. Sfruttando l'esercizio 3, si costruisca uno spazio topologico X connesso per archi con $|X| \geq 2$ contenente un aperto U totalmente sconnesso.

14. Sia X uno spazio topologico T_1, connesso per archi e con $|X| \geq 2$, e sia U un aperto di X. Si mostri che U non può essere totalmente sconnesso.

15. Sia $X = \mathbb{R}$, dotato della topologia i cui chiusi sono $\mathbb{R}$ stesso, e i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ aventi cardinalità al più numerabile. Si dica se X sia connesso, connesso per archi, compatto.

16. Sia $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1x_2 = x_3x_4\}$. Quante componenti connesse ha $\mathbb{R}^4 \setminus X$? Si mostri che ogni componente connessa di $\mathbb{R}^4 \setminus X$ è omeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^3$. (Suggerimento: si cerchi preliminarmente un omeomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che porta X nell'insieme di equazione $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$).

17. Si dimostri che $\mathbb{R} \times (0, 1)$ e $\mathbb{R} \times [0, 1]$ non sono omeomorfi (suggerimento: si esaminino opportune esaustioni in compatti).

18. Siano $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ con $n, m \geq 1$ e $p \neq q$. Fissiamo inoltre p punti distinti $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ e q punti distinti $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{R}^m$. Si mostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1, \ldots, x_p\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m \setminus \{y_1, \ldots, y_q\}$ (suggerimento: si esaminino opportune esaustioni in compatti).

19. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi metrici, e denotiamo con d_X (risp. d_Y) la distanza su X (risp. su Y). Abbiamo visto a lezione che, se X è compatto, allora f è uniformemente continua, e diamo qui una nuova dimostrazione di questo fatto. Sia dunque X compatto.

Sia
$$G\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad G(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$
e, per ogni $\varepsilon > 0$, sia
$$A_\varepsilon = G^{-1}([\varepsilon, +\infty)) \subseteq X \times X\ .$$

(1) Si mostri che G è continua.
(2) Si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme A_ε è compatto.
(3) Si dimostri che, se $\varepsilon > 0$, la mappa $X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto d_X(x, y)$ assume un minimo strettamente positivo su A_ε, e si deduca che f è uniformemente continua.