4 dic 2020

$u(t) = u_1(t) + i\, u_2(t)$

$$C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \xrightarrow{1-1} C([-\pi,\pi],\mathbb{C}) \hookrightarrow L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$$

$\|u\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|$ $\qquad \sup_{|t|\le\pi} |u(t)|$ $\qquad \|u\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2\, dt$

$\|\cdot\|_2$ indotta da $\langle u,v\rangle \doteq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\,\overline{v(t)}\, dt$

Oss: $\|u\|_2 \le \|u\|_\infty \quad \forall u \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$u_n \to u$ unif. $\Rightarrow u_n \to u$ in $L^2([-\pi,\pi])$

$e_k(t) \doteq e^{ikt} \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \qquad k\in\mathbb{Z}$

è un sist ortonorm. per $\langle\ ,\ \rangle$

$V_n = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_k : |k|\le n\} \qquad \dim_{\mathbb{C}} V_n = 2n+1$

Fissata $u \in L^2([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ cerco $v \in V_n$ che minimizza $\|u-v\|_2^2$ $\quad v = \sum_{|k|\le n} \lambda_k e_k$

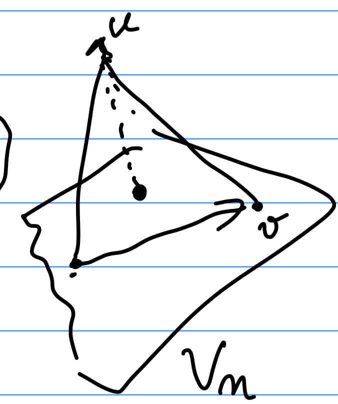
$v(t) = \sum_{|k|\le n} \lambda_k e_k(t)$

vedi volta scorsa

$\|u-v\|_2^2 = [\dots] =$

$\boxed{\text{COEFF. DI FOURIER DI } u}$

$\hat{u}_k = \langle u, e_k\rangle$



$$= \langle u,u\rangle + \sum_{|k|\le n}\left[\lambda_k\overline{\lambda_k} - \overline{\lambda_k}\,\hat{u}_k - \lambda_k\overline{\hat{u}_k} + \hat{u}_k\overline{\hat{u}_k}\right] - \sum_{|k|\le n}|\hat{u}_k|^2$$

$$= \|u\|_2^2 + \sum_{|k|\le n} \overbrace{(\lambda_k-\hat{u}_k)\overline{(\lambda_k-\hat{u}_k)}}^{|\lambda_k-\hat{u}_k|^2} - \sum_{|k|\le n} |\hat{u}_k|^2$$

Il v che realizza il minimo si ha per $\lambda_k = \hat{u}_k$ $\forall |k|\le n$

$v = S_n u$

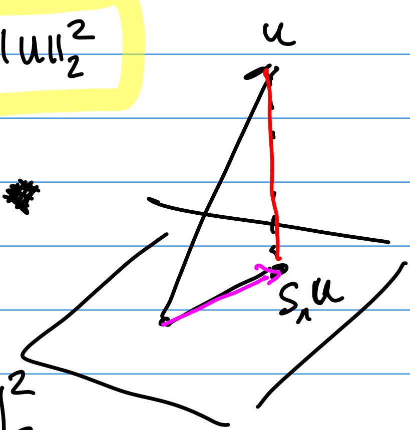
$$\|u-v\|_2^2 \ge \|u - S_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \sum_{|k|\le n} |\hat{u}_k|^2 \quad (*)$$

$$S_n u \doteq \sum_{|k|\le n} \hat{u}_k e_k$$

DISUG di Bessel: Se $u \in L^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{|k|\le n} |\hat{u}_k|^2 \le \|u\|_2^2}$

Dim: $0 \le \|u - S_n u\|_2^2 = \|u\|_2^2 - \sum |\hat{u}_k|^2$ (*)

$$\|u\|_2^2 = \|u - S_n u\|_2^2 + \sum_{|k|\le n} |\hat{u}_k|^2$$



OSS: $\sum_{|k|\le n} |\hat{u}_k|^2 = \|\sum_{|k|\le n} \hat{u}_k e_k\|_2^2 = \|S_n u\|_2^2$

— o —

Traccia: sviluppare $\langle \sum_{|k|\le n} \hat{u}_k e_k , \sum_{|h|\le n} \hat{u}_h e_h \rangle$

$$\langle e_k, e_h \rangle = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Domanda: $S_n u \longrightarrow u$ in qualche senso?

Risp: dipende
- da chi è u
- in quale senso si int la convergenza $\begin{cases} \text{puntuale} \\ \text{uniforme} \\ \text{in } \|\cdot\|_2 \end{cases}$

PROP: Se $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora $S_n u \longrightarrow u$ in L^2

cioè $\|S_n u - u\|_2 \longrightarrow 0$ $\quad n \to \infty$

— o —

(posposto) TEOREMA: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ è denso in $C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ per $\|\cdot\|_\infty$

cioè $\forall u \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists v \in \bigcup V_n$ con $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$

$\boxed{\text{Dim [Prop]}}$ $u \in C_{2\pi}$, $\varepsilon > 0$ fissato. Per TEOR$_D$ $\exists\, v \in V_{n_0}$ tale che $\|u - v\|_\infty < \varepsilon$. Se $n \geq n_0 \Rightarrow v \in V_n$

$$\|u - S_n u\|_2^2 \leq \|u - v\|_2^2 \leq \|u - v\|_\infty^2 \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \|u - S_n u\|_2 \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

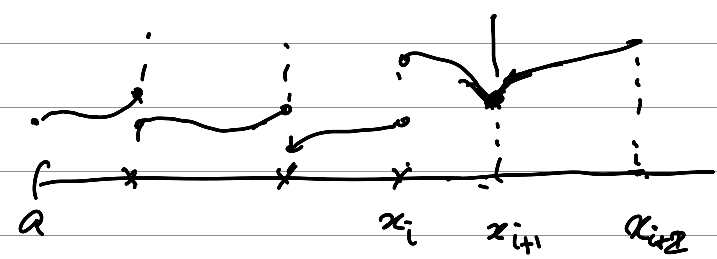
Domanda: Se $u \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $S_n u(x) \to u(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$?

In generale: no. (Non faccio il controesempio)

Def: Dico che $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ è regolare a tratti se

- f è continua in tutti i pti ad eccezione al più di $a \leq x_1 < x_2 < \ldots \leq x_k \leq b$
- f è C^1 con derivata che ammette limite al bordo sugli intervalli (x_i, x_{i+1})

Def: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è regolare a tratti se lo è su tutti gli intervalli chiusi e limitati



Prop (P): Se f è 2π-periodica e regolare a tratti $\Rightarrow S_n f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ in tutti i punti in cui f è continua

x_0 punto di disc. $S_n f(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}\left(f(x_0^+) + f(x_0^-) \right)$

$$f(x_0^\pm) \doteq \lim_{x \to x_0^\pm} f(x)$$

—— o ——

Prop (U): Se $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ (C^1 + 2π-periodica) allora

$S_n f \longrightarrow f$ UNIFORMEMENTE su $\mathbb{R}$

—— o ——

Mi accingo a dimostrare prop (U).

$$(S_n f)(x) \doteq \sum_{|k|\leq n} \langle f, e_k \rangle e_k(x) = \sum_{|k|\leq n} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \right] e^{ikx}$$

$\langle f, e_k \rangle$ = $\hat{f}_k$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k|\leq n} e^{ik(x-t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, dt$$

$$D_n(x) \doteq \sum_{|k|\leq n} e^{ikx}$$ NUCLEI DI DIRICHLET

— o —

LEMMA: $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ allora $\widehat{(f')}_k = ik\, \hat{f}_k$

E quindi la serie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k(x)$ è totalmente convergente

e si ha $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k(x)$

$\boxed{\text{Lemma} \Rightarrow \text{Prop (U)}}$

Dim: $\hat{f}_k \doteq \langle f, e_k \rangle$

$$\hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt$$

Calcolo × parti
derivando f
integrando e^{-ikt}

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \left[f(t) \frac{1}{(-ik)} e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{1}{-ik} e^{-ikt}\, dt \right\}$$

→ è zero perchè la funz. è periodica

$$\hat{f}_k = \frac{1}{ik} \underbrace{\boxed{\frac{1}{2\pi}\int f'(t)\, e^{-ikt}\, dt}}_{\widehat{(f')}_k} = \frac{1}{ik} \widehat{(f')}_k$$

$$\sum_{|k|\leq n} |\hat{f}_k| = |\hat{f}_0| + \sum_{0<|k|\leq n} |\hat{f}_k| = |\hat{f}_0| + \sum_{0<|k|\leq n} \frac{1}{|k|} \left| \widehat{(f')}_k \right| \leq *$$

Per Cauchy-Schwartz

$$\sum a_k b_k \le \left(\sum a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum b_k^2\right)^{1/2}$$

$$* \le |\hat{f}_0| + \left(\sum_{0<|k|\le n} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{0<|k|\le n} \left|\widehat{(f')}_k\right|^2\right)^{1/2}$$

Per la disug di Bessel applicata a $f' \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$

ho che $\displaystyle\sum_{0<k\le n} \left|\widehat{(f')}_k\right|^2 \le \|f'\|_2^2 = \boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt}$ non dip da n

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}_k| \le \|\hat{f}_0\| + C\,\|f'\|_2 \qquad (\star)$$

$$C = \left(2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}$$

E quindi la $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k(x)$ converge totalmente

e uniformemente $\quad \boxed{\|\hat{f}_k e_k\|_\infty = |\hat{f}_k|}$

$$\|\hat{f}_k e_k\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\hat{f}_k e^{ikx}| = |\hat{f}_k|$$

La serie converge totalmente a $\tilde{f}$

ma $\tilde{f} = f$ perché la serie converge in L^2 ad f

(per unicità del limite)

Dim (Prop P) Proprietà del nucleo di Dirichlet

$$D_n(x) = \sum_{|k|\le n} e^{ikx} = e^{-inx} \sum_{|k|\le n} e^{i(n+k)x} = *$$

$x \neq 0 \mod 2\pi$

$$\cancel{=} = e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$$

Somma di serie geom. di e^{ix} da 0 a $2n$

$$= \frac{e^{i(n+1)x} - e^{-inx}}{e^{ix} - 1} = \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})x} - e^{-i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}$$

molt N e D per $e^{-ix/2}$

$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i \sin\alpha$

$$\boxed{D_n(x) = \frac{\cancel{2i}\, \sin((n+1/2)x)}{\cancel{2i}\, \sin(x/2)}}$$

LEMMA DI RIEMANN: Se $f \in C([a,b]) \cap C^1(]a,b[)$ * Allora

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\, dt = 0$$

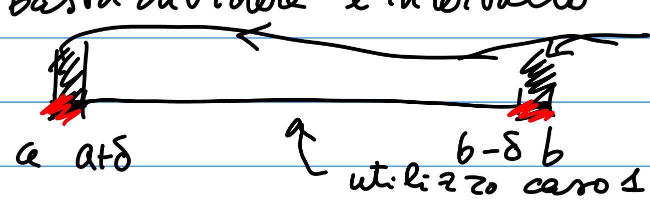
* il lemma vale $\forall f \in L^1(a,b)$ ma dim. vers + debole

Dim: CASO 1 $f \in C^1([a,b])$

$$\int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\, dt = \left[f(t) \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \cos(\lambda t) \right]_a^b + \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(t) \cos(\lambda t)\, dt$$

$$\left| \int_a^b f(t) \sin(\lambda t)\, dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \left(2\|f\|_\infty + (b-a) \|f'\|_{\infty,[a,b]} \right) \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

Caso generale: basta dividere l'intervallo



contributo piccolo se δ piccolo (uniformemente in λ)

Dettagli per esercizio

Oss: Prop (U) vale anche se $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$

e C^1 a tratti (C^1 tranne che $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

e $C^1([x_i, x_{i+1}])$)

x esercizio

In realtà prop (U) basta f sia Lipschitz (ND)
