Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 4)

Esercizio 1

Si consideri un riferimento cartesiano ortonormale (O, x, y, z) nello spazio euclideo.

1. Sia T il triangolo di vertici $(-1, 3, 0), (-1, -3, 0), (2, 0, 0)$. Calcolare il volume del solido S interno al prisma retto di base T e compreso tra le superfici di equazioni $z = 2 - x^2$ e $z = 1$.

2. Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z, compreso tra il dominio

$$D := \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y \leq 2, x \geq \frac{1}{2}\right\}$$

   e la parte di superficie di equazione $z = \ln(xy)$ la cui proiezione ortogonale sul piano xy è contenuta in D.

3. Si calcoli il volume della regione S, interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $x + y + z = 4$.

Esercizio 2

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ e $f : S \to \mathbb{R}$ una funzione. Nei casi seguenti, stabilire se f è integrabile su S e in caso affermativo calcolare $\iiint_S f \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$:

1. $f(x, y, z) := x + z$,
   $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$;

2. $f(x, y, z) := 4ye^{y^2}(z - 1)$,
   $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - y\}$;

3. $f(x, y, z) := z$,
   $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, z \geq 0, y \geq 3x, 9 \geq y^2 + z^2\}$;

4. $f(x, y, z) := 2z$,
   $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq y \leq x^2, x^2 - 2x + y^2 \leq 0, 0 \leq z \leq \sqrt{xy}\}$;

5. $f(x,y,z) := x+y+z$,
$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x+1, 0 \leq z \leq x+y\}$;

6.
$$f(x,y,z) := \frac{1}{z(z+1)},$$

$$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \frac{1}{x+1} \leq z \leq \frac{1}{y+1}\right\};$$

7.
$$f(x,y,z) := \frac{1}{(2-x+y+z)^2},$$
$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y-z \leq 1, x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0\}$;

8. $f(x,y,z) := 2z$,
$S := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2\sqrt{x^2+y^2} < z < x+2\right\}$;

9.
$$f(x,y,z) := \begin{cases} \arctan(x^2 - x\ln(y)) \text{ se } (x,y,z) \in S \text{ e } x < 0 \\ \arctan(\ln(x)\ln(y)) \text{ se } (x,y,z) \in S \text{ e } x > 0 \end{cases},$$

$$S := \big((-1,0) \times (0,1)^2\big) \cup \big(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1/e < x < 1, 0 < xy < 1\} \times (0,1)\big);$$

10. $f(x,y,z) := \sin(x+y+z)$,
$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 1\}$;

11. $f(x,y,z) := xz$,
$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, (x-z)^2+y^2 \leq z^2+1\}$;

12. $f(x,y,z) := y$,
$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+(y-3)^2+z^2 \leq 1\}$.

Esercizio 3

Siano $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme Lebesgue-misurabile, $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ due insiemi aperti e $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un diffeomorfismo di classe C^1 tale che

$$|\det(D\Phi(x))| = 1 \quad \forall x \in \Omega_1 \cap S, \qquad\qquad \Phi(\Omega_1 \cap S) = \Omega_2 \cap S.$$

Si supponga inoltre che $\mathcal{L}^n(S \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)) = \mathcal{L}^n(S \cap \Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$. Siano $f, g : S \to \mathbb{R}$ funzioni Lebesgue-integrabili su S tali che

$$f(\Phi(x)) = -f(x) \quad \forall x \in \Omega_1 \cap S, \qquad g(\Phi(x)) = g(x) \quad \forall x \in \Omega_1 \cap S.$$

Dimostrare che

$$\int_S f \,\mathrm{d}x = 0, \qquad\qquad \int_S g \,\mathrm{d}x = 2 \int_{S\cap\Omega_1} g \,\mathrm{d}x = 2 \int_{S\cap\Omega_2} g \,\mathrm{d}x.$$