LEZIONE 14

## CONSEGUENZA DI F.T.

**OSS:** $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È MISURABILE (PER LEBESGUE)

$\iff$ IL SOTTOGRAFICO $S_f = \{(x,t) : t < f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$

È MISURABILE

INOLTRE, SE $f \geq 0$, SI HA $\int_{\mathbb{R}^n} f = \mathcal{L}_{\mathbb{R}^{n+1}}\big(S_f \cap (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)\big)$

**DIM.** $f$ MIS $\iff$ $\{f>t\}$ MIS. $\forall t$, MA $\{f>t\}$ È LA SEZIONE DI $S_f$

$\Leftarrow$) $S_f$ MIS $\underset{F.T.}{\Rightarrow}$ $\{f>t\}$ MIS. $\tilde{\forall} t$. DATO $t \in \mathbb{R}$ SCELGO

$t_k \searrow t$ T.C. $\{f>t_k\}$ È MIS. $\Rightarrow$ $\{f>t\} = \bigcup_k \{f>t_k\}$ È MIS.

$\Rightarrow$) $f$ MIS. $\Rightarrow f = \sup_n S_n$ $\quad S_n$ SEMPLICE

$S_f = \bigcup_n S_{S_n} \Rightarrow$ POSSIAMO SUPPORRE $f$ SEMPLICE

$f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{E_i} \quad c_i \in \mathbb{R} \quad E_i$ MIS. $\Rightarrow$

$S_f = \bigcup_i E_i \times (-\infty, c_i)$ È MISURABILE.

**OSS:** $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}} dx_1 \int_{\mathbb{R}} dx_2 \dots \int_{\mathbb{R}} f \, dx_n$

# CAMBIO DI VARIABILE

$A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTI

$\Phi : A \to B$ DIFFEOMORFISMO $C^1$,

CIOÈ $\Phi$ BIGETTIVA, $\Phi \in C^1$, $\Phi^{-1} \in C^1$ $\left( \Leftrightarrow J_\Phi = \det(D\Phi) \neq 0 \right)$

TALE $\Phi$ È DETTA CAMBIO DI VARIABILI

## TEOREMA

$$\left[ J_\Phi = \det(D\Phi) \right]$$

① $E \subseteq A$ MISURABILE $\Rightarrow$

$\Phi(E)$ È MIS. E $|\Phi(E)| = \int_E |J_\Phi(x)|\, dx$

$$\left[ \begin{array}{l} x \in A \\ y = \Phi(x) \in B \end{array} \right]$$

② $f : B \to \mathbb{R}$ MIS $\Rightarrow$ $f \circ \Phi$ MIS

$f$ INT $\Rightarrow$ $f \circ \Phi$ INT

E SI HA $\boxed{\int_B f(y)\, dy = \int_A f(\Phi(x))\, |J_\Phi(x)|\, dx}$

OSS: DA ② SI OTTIENE ① PRENDENDO $f = \chi_E$

# SCHEMA DELLA DIMOSTRAZIONE

(PER DETTAGLI VEDERE FUSCO - MARC. - SBORDONE)

**PROP.** $E \subseteq \Delta$ MIS. $\Rightarrow \phi(E)$ MIS.

E $\displaystyle |\phi(E)| \leq \int_E |J_\phi|$

**DIM.** 1 $\Phi(x) = L\cdot x$ LINEARE ED $E = [0,1]^n$.

$\Phi(E) = L\cdot E$ PARALL. GENERATO DALLE COLONNE DI $L$. SE $L$ È DIAGONALE $\Rightarrow |L E| = |\det L|$

MA QUESTO VALE $\forall L$ PER "ORTOGONALIZZAZIONE"

② IN GENERALE VALE SEMPRE

$|L \cdot E| = |\det L| \cdot |E|$ E SI FA PER

APPROSSIMAZIONE:

OK SUI RETTANGOLI

OK SU $\cup$ DI RETT. $\Rightarrow$ OK SUGLI APERTI

OK SU $\cap$ DI APERTI $\Rightarrow$ OK SUI MISURABILI

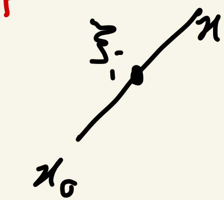
③ VALE ANCHE PER $\Phi(x) = v + L \cdot x$ AFFINE

(PER INVARIANZA PER TRASLAZIONI)

(4) $\forall K \subseteq A$ compatto e $\forall \sigma > 0$ $\qquad Q_r(x_0) = \prod_i [x_0 - re_i, x_0 + re_i]$

$\exists r_0 > 0$ t.c. $\boxed{\Phi\left(Q_r(x_0)\right) \subseteq F_{x_0}\left(Q_{(1+\sigma)r}(x_0)\right)}$

$\forall r \in (0, r_0)$ e $\forall x_0 \in K$




Dove $F_{x_0}(x) = \phi(x_0) + D\phi(x_0)(x - x_0)$

è il pol. di Taylor di $\Phi$ in $x_0$.

Infatti, dato $x \in Q_{r_0}(x_0)$, si ha

$$\left|\phi_i(x) - F_i(x)\right| \underset{\text{Lagrange}}{=} \left|\left[\underbrace{D\phi_i(\xi_i) - D\phi_i(x_0)}_{\to 0}\right] \cdot \overbrace{(x - x_0)}^{\leq \sqrt{n} \cdot r_0}\right| \leq \sigma \cdot r_0$$

$D\phi_i(x_0) = DF_{x_0}(\xi_i)$

$1 \leq i \leq n$

$\xi_i = \lambda x + (1-\lambda) x_0$

$\lambda \in (0,1)$

⑤ RICOPRENDO $E$ CON CUBI SI HA

$$\phi(E) \leq \int_E |J_\phi| \quad , \text{ INFATTI}$$

COMINCIAMO DA $E = R$ RETTANGOLO

$$R = \bigcup_i Q_r(x_i) \Rightarrow \phi(R) \subseteq \bigcup_i F_i\left(Q_{(1+\sigma)r}(x_i)\right)$$

CON $F_i(x) = \phi(x_i) + D\phi(x_i)(x - x_i)$

$$\Rightarrow |R| \leq \sum_i \left| F_i\left(Q_{(1+\sigma)r}(x_i)\right)\right| = \sum |Q_{(1+\sigma)r}(x_i)| \, |J_\phi(x_i)|$$

$$= (1+\sigma)^n \sum \left( \int_{Q_r(x_i)} |J_\phi(x)| + \int_{Q_r(x_i)} \left( |J_\phi(x_i)| - |J_\phi(x)| \right) \right) \leq (1+\sigma)^n \int_R |J_\phi| + \sigma(1+\sigma)^n |R|$$

$\leq \sigma$ PER $r$ PICCOLO

MANDANDO $\sigma \to 0$ SI OTTIENE IL RISULTATO PER $E = \mathbb{R}$

POI PER APPROSS. SI PASSA PRIMA AGLI APERTI

QUINDI A TUTTI GLI $E$ MISURABILI.

(VA ANCHE VERIFICATO CHE $\phi(E)$ È MIS.)

LA PROP. È DIMOSTRATA.

# DIM. DEL TEOREMA

BASTA MOSTRARE (2).

MOSTRIAMO CHE $\displaystyle\int_B f \leq \int_A (f\circ\varphi)\,|J_\varphi|$.

SE $f = \chi_E$ SEGUE DALLA PROPOSIZIONE.

PER LINEARITÀ VA BENE ANCHE $f$ SEMPLICE.

PER APPROSSIMAZIONE, CON $f = \sup_n s_n = \lim_n s_n$,

SI FA PER TUTTE LE $f \geq 0$ (CONV. MONOTONA).

PER LINEARITÀ VALE $\forall f$ INTEGRABILI.

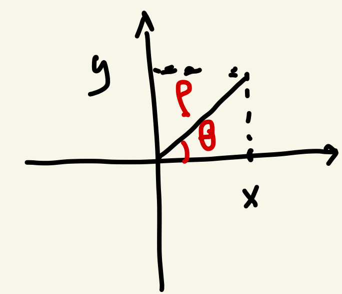
INFINE $\displaystyle\int_B f \leq \int_A (f\circ\varphi)\,|J_\varphi| \leq \int_B (f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})\,|\underbrace{J_\varphi \cdot J_{\varphi^{-1}}}_{=1}| = \int_B f \Rightarrow$ SONO TUTTE UGUAGLIANZE

**ES:** (COORD. POLARI)

$$(x,y) = \phi(\rho,\theta)$$

$$\phi : [0,+\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$$

$$\phi\big|_{(0,+\infty)\times(0,2\pi)}$$ DIFFEOMORFISMO $C^\infty$




$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

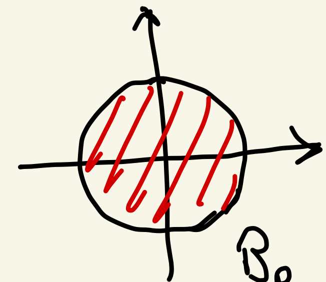
$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta \text{ T.C. } \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ E } \sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

$\theta \in [0,2\pi)$

$$D\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$J_\phi = \rho \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = \int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$



$B_R$

**ES:** $$|B_R(0)| = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{B_R(0)}(x,y)$$

$$= \int_{[0,\infty)\times[0,2\pi)} \chi_{[0,R]\times[0,2\pi)}(\rho,\theta)\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$\underset{\text{F.T.}}{=} \int_0^{2\pi}\underbrace{\int_0^R \rho\,d\rho}_{R^2/2}\,d\theta = 2\pi\cdot\frac{R^2}{2} = \pi R^2$$

<u>OSS:</u> $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $f$ RADIALE,

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} f \, dx\,dy = 2\pi \int_0^\infty g(\rho)\,\rho \, d\rho$$

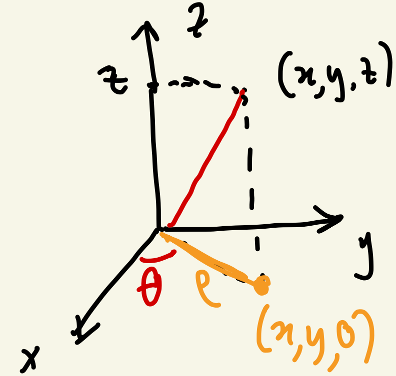
<u>ES:</u>

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \pi \int_0^\infty \underbrace{e^{-\rho^2} \cdot 2\rho}_{\left(-e^{-\rho^2}\right)'} \, d\rho = \pi \left(-e^{-\rho^2}\right)_0^\infty = \pi$$

<u>OSS:</u>

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} \underset{\text{F.T.}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\right)^2 = \pi \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

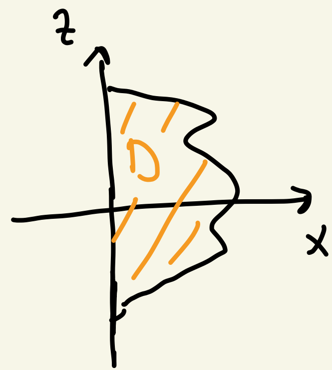
**ES:** (COOR. CILINDRICHE)




$$\phi(\rho,\theta,z) = (x,y,z)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad J_\varphi = \rho$$

## SOLIDI DI ROTAZIONE




$$x = g(z) \geq 0$$

$$D = \left\{ (x,z) : 0 \leq x \leq g(z) \right\}$$

$$E = \left\{ (x,y,z) : 0 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq g(z) \right\}$$

ROTAZIONE DI D ATTORNO ALL' ASSE z

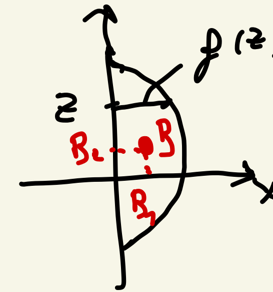


$$|E_z| = \pi g^2(z)$$

$$|E| = \int \chi_E \, dx\,dy\,dz = \int_{\{(\rho,\theta,z) : 0 \leq \rho \leq g(z)\}} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz \underset{\text{F.T.}}{=}$$

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} dz \int_0^{g(z)} \rho = \pi \int_{\mathbb{R}} g^2(z)\, dz = \pi \int_{\mathbb{R}} |E_z|$$

DATO $E \subseteq \mathbb{R}^n$ DEFINIAMO IL BARICENTRO O CENTRO DI MASSA DI $E$ COME




$$\mathbb{R}^n \ni B = \fint_E x\,dx = \frac{1}{|E|}\int_E x .$$

IN PARTICOLARE, PER L'INSIEME $D$, SI HA

$$B = (B_1, B_2) \quad \text{CON} \quad B_1 = \frac{1}{|D|}\int_D x \underset{\text{F.T.}}{=} \frac{1}{|D|}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{f(z)} x = \frac{1}{|D|}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(z)^2}{2}$$

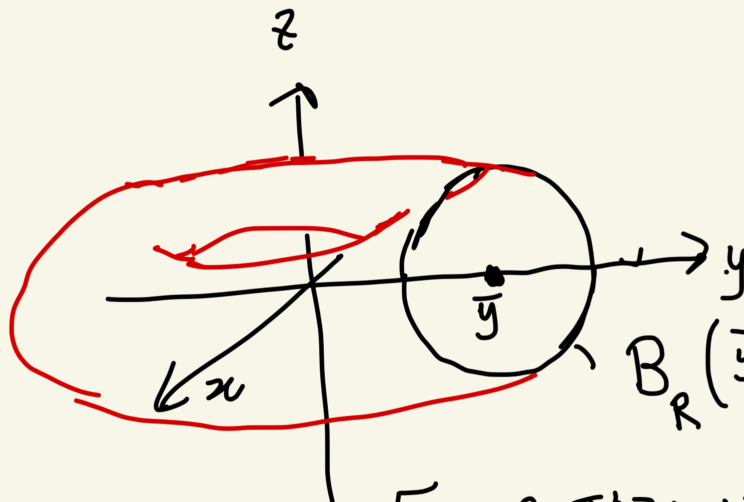
$$\Rightarrow \quad |E| = 2\pi B_1 |D|$$

LUNGHEZZA CIRCONF. DI RAGGIO $B_1$

(TEOREMA DI GULDINO O PAPPO-GULDINO)

ANALOGAMENTE SI PUÒ CALCOLARE IL VOLUME DI SOLIDI DI ROTAZIONE PIÙ COMPLICATI

**ESERCIZIO:**

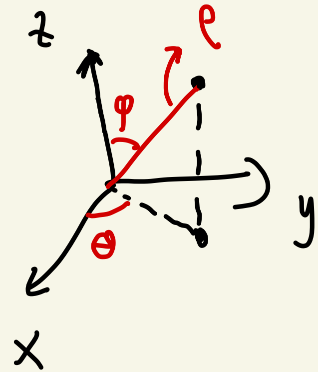



$B_R(\bar{y}, 0)$ $\quad \bar{y} \geq R$

$E$ ROTAZIONE DI $B_R(\bar{x}, 0)$

CALCOLARE $|E|$

ESEMPIO: (COOR. SFERICHE)




$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$(\rho, \theta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi]$$

$$(x, y, z) = \Phi(\rho, \theta, \varphi)$$

$$J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \sin\varphi \cos\theta & -\rho \sin\varphi \sin\theta & \rho \cos\varphi \cos\theta \\ \sin\varphi \sin\theta & \rho \sin\varphi \cos\theta & \rho \cos\varphi \sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho \sin\varphi \end{pmatrix}$$

↗ CONTO

$$= \rho^2 \sin\varphi \geq 0$$

$\underline{ES:}$ $|B_R| = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{R} \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$

$= 2\pi \left( \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi}_{=2} \right) \left( \underbrace{\int_0^{R} \rho^2 \, d\rho}_{= R^3/3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$

$B_R = B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^3$

$\underline{ES:}$ AREA ELLISSOIDE $\quad E = \left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

TRASF. LINEARE $\quad X = \frac{x}{a}, \; Y = \frac{y}{b}, \; Z = z/c$

$L = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \qquad (X, Y, Z) = L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad LE = B_1$

$|LE| = (\det L) \cdot |E| = |B_1| = \frac{4}{3}\pi \Rightarrow |E| = \frac{4}{3}\pi \, a \cdot b \cdot c$

**ESERCIZIO:** CALCOLARE IL BARICENTRO DI

$$\mathbb{R}^3 \supseteq E = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1 , \; -1 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \right\}$$

OSS: E È UN SOLIDO DI ROTAZIONE

ATTORNO ALL'ASSE z