ANALISI 2

LEZIONE 15

M. NOVAGA

OSSERVAZIONE SUL COMPLETAMENTO

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA

① $\mu \to \mu^e$ MISURA ESTERNA

$\mathcal{M}$ μ^e MISURABILI

$\mu^* = \mu^e|_{\mathcal{M}}$ MISURA COMPLETA CHE ESTENDE μ

② $\mathcal{B} = \{ A \cup N', A \setminus N' : N' \subseteq N, N \in \mathcal{A}$ DI MISURA NULLA$\}$

È UNA σ-ALGEBRA

$\bar{\mu}$ T.C. $\bar{\mu}(A \cup N') = \bar{\mu}(A \setminus N') = \bar{\mu}(A)$ È UNA MISURA COMPLETA CHE ESTENDE μ

SE $(X, \mathcal{A}, \mu)$ È σ-FINITO $\Rightarrow$ $\mu^* = \bar{\mu}$ E $\mathcal{B} = \mathcal{M}$

ALTRIMENTI PUÒ SUCCEDERE CHE $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M}$

E μ^* È UN'ESTENSIONE DI $\bar{\mu}$ A $\mathcal{M}$.

DEF: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ SPAZIO DI MISURA. μ È SATURATA SE TUTTI GLI INSIEMI LOCALMENTE MISUR. SONO MISUR., DOVE $E \subseteq X$ È LOC. MIS. SE $E \cap A \in \mathcal{A}$ $\forall A \in \mathcal{A}$ CON $\mu(A) < +\infty$.

IN GENERALE μ^* È SATURATA,

MENTRE $\bar{\mu}$ POTREBBE NON ESSERLO.

ESERCIZI

(1) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f DERIVABILE IN (a,b),

f LIPSCITZ. IN $[a,b]$ (CIOÈ $|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$,

OVVERO $|f'(x)|\leq C \quad \forall x$)

$\Rightarrow$ f' È INTEGRABILE E $\int_a^b f' = f(b)-f(a)$.

$\vdash$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} f_h(x) \qquad f_h(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

f_h MISURABILI $\Rightarrow$ f' MISURABILE

f' È ANCHE LIMITATA $\Rightarrow$ f' INTEGRABILE (SECONDO LEB.)

$h = \frac{1}{n}$, $\quad \left| f_{\frac{1}{n}}(x) \right| \leq C$ POICHÉ f È C-LIP.)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^{b-\frac{1}{n}} f_{\frac{1}{n}}(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CONV. DOMINATA}}}{=} \int_a^b f'(x)$$

$$\boxed{\fint_I f = \frac{1}{|I|} \int_I f}$$

ABBIAMO ANCHE

$$\int_a^{b-\frac{1}{n}} f_{\frac{1}{n}}(x) = n\left[\int_a^{b-\frac{1}{n}} f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = n\left[\int_{b-\frac{1}{n}}^{b} f - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f \right]$$

$$= \fint_{b-\frac{1}{n}}^{b} f - \fint_a^{a+\frac{1}{n}} f \xrightarrow[n\to\infty]{} f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx .$$

② ASSOLUTA CONTINUITÀ DELL' INTEGRALE

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ MISUR., $f \in L^1(A)$,

CIOÈ $f: A \to \mathbb{R}$ MISUR. T.C. $\int_A |f| < +\infty$

$\Rightarrow \forall \varepsilon \; \exists \delta$ T.C. $\forall \; E \subseteq A$ MIS. CON $|E| < \delta$

SI HA $\int_E |f| < \varepsilon$.

<u>DIM</u> PER ASSURDO $\exists \varepsilon > 0$ ED $\exists E_n$ CON $|E_n| < \frac{1}{2^n}$

T.C. $\int_{E_n} |f| \geq \varepsilon$. SIA $F_n = \bigcup_{k \geq n+1} E_k$.

SI HA $|F_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |E_k| \leq \frac{1}{2^n}$

$F_{n+1} \subseteq F_n$ E $\int_{F_n} |f| = \int_A |f| \chi_{F_n} \geq \varepsilon$.

$\bigcap F_n = F$ MIS. CON $|F| = 0$

IN PART. $\int_A |f| \chi_F = 0$

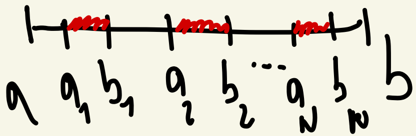
SIA $g_n = |f| \chi_{F_n}$ ABBIAMO $g_n \to |f| \chi_F$, CON $g_n \geq g_{n+1}$.

$g_n = |g_n| \leq |f|$ INTEGRABILE $\Longrightarrow$ CONV. DOMINATA

$\lim \int_{F_n} |f| = \lim_n \int g_n = \int_F |f| = 0$ ASSURDO.

DEF: $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ È ASSOLUTAMENTE CONT. SE

$\forall \varepsilon\ \exists \delta$ T.C. $\forall\ a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots a_n < b_n \leq b$



T.C. $\left|\bigcup_i [a_i,b_i]\right| = \sum_i b_i - a_i < \delta$

$$\Rightarrow \sum |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

OSS: F A.C. $\Rightarrow$ F CONT. IN $[a,b]$

OSS: $f \in L^1([a,b])$ E DEF. $F(x) = \int_a^x f \Rightarrow$

F È A.C. IN $[a,b]$.

③ CONTINUITÀ DI INT. DIPENDENTI DA PARAMETRO E DERIVATA SOTTO L'INTEGRALE

$f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ MISUR. IN $\mathbb{R}^{n+1}$

T.C. $f(t,\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ INT. IN $\mathbb{R}^n$ $\forall t$, CIOÈ

$$\exists\ F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t,x)\,dx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

ALLORA:

a) $f(\cdot,x)$ È CONTINUA IN t $\tilde{\forall} x$ E

$|f(t,x)| \leq g(x)$ INTEGRABILE $\Rightarrow F$ È CONT.

b) $f(\cdot, x)$ DERIV. IN t $\tilde{\forall} x$ E

$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ INTEGR. $\Rightarrow$ F È DERIVABILE $\forall t$

E $F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx$.

DIM.

(a) FISSIANO t E SIA $t_n \to t$

$$\lim_n F(t_n) = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} f(t_n, x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_n f(t_n, x) = F(t)$$

CONV. DOMINATA

(b) FISSIANO t E $t_n \to t$, CON $t_n \neq t$.

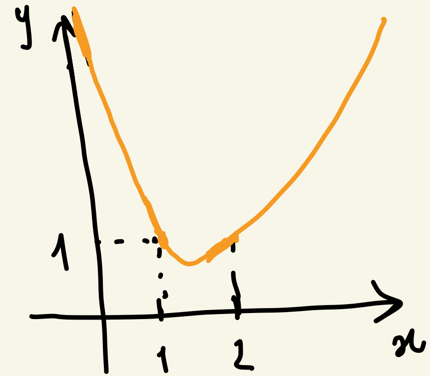
$$\lim_n \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \lim_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}\,dx$$

$$\tilde{\forall} x \quad \left|\frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{LAGRANGE}}}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\xi_n,x)\right| \underset{\substack{\downarrow \\ \text{IPOTESI}}}{\leq} g(x)$$

PER CONV. DOMINATA

$$\lim_n \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,dx = F'(t).$$

GAMMA DI EULERO



ES: $\Gamma(x) = \int_0^\infty \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{f} \, dt$

INT. IN t $\forall x > 0$

$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

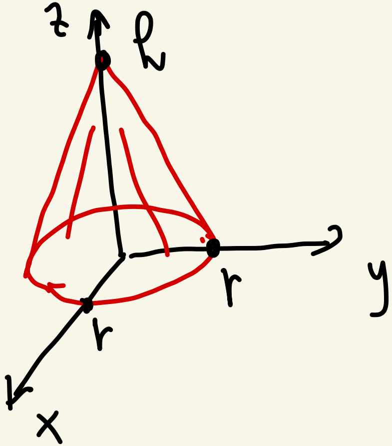
PER QUANTO DETTO $\Gamma \in C^\infty((0,+\infty))$

E $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty \left[\frac{\partial^{(k)}}{\partial x^k} t^{x-1}\right] \cdot e^{-t} \, dt$

(IN PART. SI VEDE CHE $\Gamma'' > 0$ CIOÈ Γ È CONVESSA)

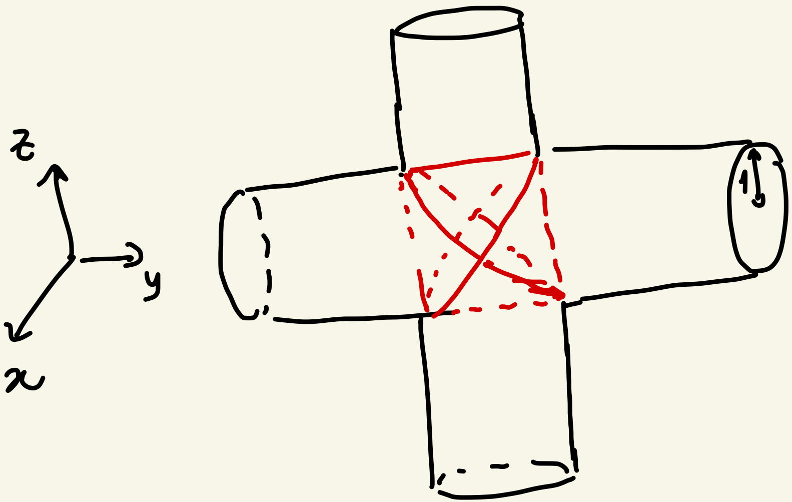
ESERCIZI PER CASA:

(1) CALCOLARE IL BARICENTRO DI UN CONO RETTO DI RAGGIO $r>0$ E ALTEZZA h



$$B = (0, 0, B_z)$$

② CALCOLARE IL VOLUME DELL'INTERSEZIONE DI DUE CILINDRI ORTOGONALI DI RAGGIO 1



$$E = \{x^2 + y^2 \leq 1\} \cap \{x^2 + z^2 \leq 1\} \qquad |E| = ?$$