Matr.: **Cognome, Nome:**

Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Simulazione compitino - 11/12/2020.

Esercizio 1) Siano X l'insieme dei numeri reali dotato della topologia della retta di Sorgenfrey (una cui base, lo ricordiamo, è data dagli insiemi della forma $[a,b)$, con $a<b$), ed $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali dotato della topologia euclidea.

(1) Sia $x_0 \in X$. Si determini la componente connessa C_{x_0} di x_0 in X.
(2) Si descrivano tutte le funzioni continue $f\colon \mathbb{R} \to X$.

Soluzione. (1) Dimostriamo che $C_{x_0} = \{x_0\}$ (cioè X è totalmente sconnesso). Ovviamente si ha $\{x_0\} \subseteq C_{x_0}$. Se esistesse $y \in C_{x_0} \setminus \{x_0\}$, posto $z = (x_0+y)/2$, la decomposizione

$$C_{x_0} = (C_{x_0} \cap (-\infty, z)) \cup (C_{x_0} \cap [z, +\infty))$$

darebbe una partizione di C_{x_0} in aperti disgiunti non vuoti, in quanto $x_0 \in C_{x_0} \cap (-\infty, z)$ e $y \in C_{x_0} \cap [z, +\infty)$. Dunque C_{x_0} sarebbe sconnesso, il che è assurdo.

In alternativa, notiamo che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme $[x_0, x_0+\varepsilon)$ è sia aperto sia chiuso. In particolare, esso è unione di componenti connesse, per cui per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $C_{x_0} \subseteq [x_0, x_0+\varepsilon)$. Dunque

$$C_{x_0} \subseteq \bigcap_{\varepsilon>0} [x_0, x_0+\varepsilon) \ = \ \{x_0\} \ ,$$

da cui la tesi.

(2): Sia $f\colon \mathbb{R} \to X$ continua. Poiché $\mathbb{R}$ è connesso, $f(\mathbb{R})$ è connesso. Per quanto visto in (1), ciò vuol dire che esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) \subseteq C_{x_0} = \{x_0\}$, cioè f vale costantemente x_0. Poiché le funzioni costanti sono sempre continue, se ne deduce che $f\colon \mathbb{R} \to X$ è continua se e solo se è costante

Esercizio 2) Sia

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = 1, \ -2 \leq z \leq 2\}$$

e sia $\sim$ la relazione di equivalenza su A definita da $(x,y,z) \sim (x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) = (x',y',z')$ oppure $z = z' \in \{-2,0,2\}$. Sia poi $B = A/\sim$.

(1) Si descriva un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a B (dimostrando che effettivamente lo è).
(2) Si dica se B sia una 2-varietà topologica.

Soluzione (1) Sia $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+(|z|-1)^2 = 1\}$, ovvero sia X l'unione delle sfere di raggio 1 centrate in $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$. Consideriamo la funzione

$$f\colon A \to X\,, \qquad f(x,y,z) = \left(x\sqrt{1-(|z|-1)^2}, y\sqrt{1-(|z|-1)^2}, z\right) \ .$$

È facile verificare che f è effettivamente ben definita, continua e a valori in X. Inoltre, f è surgettiva e $f(x,y,z) = f(x',y',z')$ se e solo se $(x,y,z) \sim (x',y',z')$. Dunque f induce una bigezione continua $\overline{f}$ tra B e X. Per mostrare che $\overline{f}$ è un omeomorfismo basta notare che A, essendo un chiuso limitato di $\mathbb{R}^3$, è compatto, mentre X, essendo un sottospazio di $\mathbb{R}^3$, è di Hausdorff. Dunque f è chiusa, ed è perciò un'identificazione. Ne segue che $\overline{f}$ è un omeomorfismo.

(2) Poiché B è omeomorfo a X, per rispondere alla domanda basta mostrare che X non è una 2-varietà topologica. Se lo fosse, infatti, ogni suo punto p avrebbe un intorno U_p omeomorfo a $\mathbb{R}^2$. Poiché $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ è connesso per archi (per esempio, in quanto omeomorfo a $S^1 \times \mathbb{R}$), seguirebbe che $U_p \setminus \{p\}$ è connesso per archi, dunque connesso. Mostriamo invece che, se V è un qualsiasi intorno di $O = (0,0,0)$ in X, allora $V \setminus \{O\}$ è sconnesso. In effetti, se $H^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\}$ e $H^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, z < 0\}$, allora $V \cap H^+$ e $V \cap H^-$ sono aperti disgiunti la cui unione dà $V \setminus \{O\}$. Inoltre, poiché O appartiene alla parte interna di V, gli insiemi $(V \setminus \{O\}) \cap H^+$ e $(V \setminus \{O\}) \cap H^-$ sono entrambi non vuoti. Ne segue che $V \setminus \{O\}$ non è connesso, per cui X (e dunque B) non è una 2-varietà.

Esercizio 3) Si determini una cubica $\mathcal{D}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che verifichi le seguenti condizioni:

(1) $(0,0)$ è un punto di molteplicità 2 con tangenti principali di equazione $y = 2x$ e $y = -2x$;
(2) gli unici punti impropri di $\mathcal{D}$ sono $[0,1,0]$ e $[0,0,1]$;
(3) la retta $y = 4$ è un asintoto per $\mathcal{D}$.

Si dica inoltre se $\mathcal{D}$ ha altri asintoti.

Soluzione Sia $f(x,y) = 0$ un'equazione di $\mathcal{D}$. Poiché $(0,0)$ è un punto di molteplicità 2, le componenti omogenee di grado 0 e di grado 1 di f sono nulle. Inoltre, poiché le tangenti principali di $\mathcal{D}$ in $(0,0)$ hanno equazioni $2x - y = 0$ e $2x + y = 0$, la componente omogenea di grado 2 di f è multipla non nulla di $(2x-y)(2x+y) = 4x^2 - y^2$. A meno di moltiplicare f per una costante non nulla, abbiamo perciò

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 + ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 \ ,$$

con a,b,c,d numeri reali non tutti nulli (in quanto $\deg f = 3$).

Un'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{D}}$ di $\mathcal{D}$ è dunque data da

$$F(x_0,x_1,x_2) = 4x_0x_1^2 - x_0x_2^2 + ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3 \ ,$$

per cui $V(\mathcal{D}) \cap \{x_0 = 0\}$ è dato dai punti della retta impropria per cui $ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3 = 0$. Affinché valga la condizione (2), questa equazione deve avere $(x_1,x_2) = (1,0)$ e $(x_1,x_2) = (0,1)$ come uniche soluzioni, e ciò avviene se e solo se $a = d = 0$ (il che assicura che $(1,0)$ e $(0,1)$ siano soluzioni) e che uno tra b e c sia nullo (il che assicura che non ve ne siano altre). Dunque $F(x_0,x_1,x_2) = 4x_0x_1^2 - x_0x_2^2 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2$, con $bc = 0$.

Affinché la retta $y = 4$ sia un asintoto di $\mathcal{D}$, la sua chiusura proiettiva $x_2 = 4x_0$ deve essere una tangente principale di $\overline{\mathcal{D}}$ nel punto $V(\overline{\mathcal{D}}) \cap \{x_2 = 4x_0\} \cap \{x_0 = 0\} = [1,0,0]$. Il gradiente di F è

$$\nabla F(x_0,x_1,x_2) = (4x_1^2 - x_2^2, 8x_0x_1 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, -2x_0x_2 + bx_1^2 + 2cx_1x_2) \ ,$$

che in $(0,1,0)$ vale $(4,0,b)$. In particolare, il punto $[0,1,0]$ è liscio, e l'unica tangente principale di $\mathcal{D}$ in $[0,1,0]$ ha equazione $4x_0 + bx_2 = 0$. Affinché (3) sia verificata, è dunque necessario e sufficiente che $b = -1$. Per quanto visto prima, segue $c = 0$, per cui la cubica $\mathcal{D}$ ha equazione

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - x^2y \ .$$

Per verificare se $\mathcal{D}$ abbia altri asintoti, calcoliamo le tangenti principali di $\overline{\mathcal{D}}$ nel punto $[0,0,1]$. Abbiamo

$$\nabla F(0,0,1) = (-1,0,0) \ ,$$

per cui $[0,0,1]$ è anch'esso un punto liscio, con tangente la retta impropria $x_0 = 0$. Ne segue che $\mathcal{D}$ non ha altri asintoti.