Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 – Foglio di esercizi n.ro 3 del 18/12/2020

1. Siano $f\colon X \to Y$, $g\colon X' \to Y'$ mappe aperte.

(1) Si mostri che la mappa
$$f \times g\colon X \times X' \to Y \times Y' \ ,$$
$$(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$$
è una mappa aperta.

(2) Si deduca che, se f, g sono identificazioni aperte, allora $f \times g$ è un'identificazione.

2. Sia $p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ la proiezione al quoziente, dove con $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ intendiamo lo spazio ottenuto collassando $\mathbb{Z}$ ad un punto (e non lo spazio ottenuto quozientando $\mathbb{Q}$ per l'azione di $\mathbb{Z}$ tramite traslazioni). Si mostri che la mappa
$$p \times \mathrm{Id}\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{Q} \ ,$$
pur essendo prodotto di due identificazioni, non è un'identificazione.

3. Sia $f\colon X \to Y$ un'identificazione. Si mostri che la mappa
$$f \times \mathrm{Id}\colon X \times [0,1] \to Y \times [0,1]$$
è un'identificazione.

(Questo fatto gioca un ruolo nella teoria dell'omotopia che svilupperemo nel secondo semestre, e vale più in generale quando a $[0,1]$ si sostituisca uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff).

4. Sia $G \curvearrowright X$ un'azione di un gruppo G sullo spazio topologico X. Abbiamo dimostrato a lezione che, se l'azione è propria e $K \subseteq X$ è compatto, allora l'insieme
$$\{g \in G \,|\, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$
è finito (l'enunciato è stato dato all'interno di un enunciato più ampio, per il quale serviva l'ipotesi di locale compattezza su X; tuttavia, il fatto qui sopra riportato vale in generale). In questo esercizio dimostriamo che, sotto l'ipotesi che X sia T_2, vale anche il viceversa.

Sia dunque X di Hausdorff, e supponiamo che, per ogni compatto $K \subseteq X$, l'insieme $\{g \in G \,|\, g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ sia finito. Sia $\Phi\colon X \times G \to X \times X$, $\Phi(x, g) = (x, g \cdot x)$.

(1) Si mostri che, se H è un compatto di $X \times X$, allora esiste un compatto $K \subseteq X$ tale che $H \subseteq K \times K$.

(2) Si mostri che, se H e K sono come al punto precedente, allora $\Phi^{-1}(H) \subseteq K \times G_0$, dove G_0 è un sottoinsieme finito di G.

(3) Si mostri che l'azione $G \curvearrowright X$ è propria.

(Dove si è usata l'ipotesi che X sia T_2?)

5. Sia $G \curvearrowright X$ un'azione di un gruppo G sullo spazio topologico X, e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso tale che $G \cdot D = X$ (cioè $\bigcup_{g \in G} g(D) = X$). Si assuma anche che la famiglia $\{g(D)\,,\ g \in G\}$ sia localmente finita. Sia inoltre $\sim$ la relazione di equivalenza su D data da $x \sim y$ se e solo se esiste $g \in G$ tale che $g(x) = y$.

(1) Si mostri che l'inclusione $D \hookrightarrow X$ induce un omeomorfismo $D/\sim \cong X/G$.
(2) Si mostri che, se X è T_2, allora l'azione $G \curvearrowright X$ è propria (suggerimento: si sfrutti l'esercizio precedente).

6. Se X, Y sono spazi topologici, la *topologia unione disgiunta* su $X \sqcup Y$ è la topologia per cui $A \subseteq X \sqcup Y$ è aperto se e solo se lo sono sia $A \cap X$ sia $A \cap Y$ (si dimostra facilmente che quella data è una definizione ben posta).

(1) Si mostri che le inclusioni $i\colon X \to X \sqcup Y$, $j\colon Y \to X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche aperte e chiuse.
(2) Si mostri che, se C è una componente connessa di $X \sqcup Y$, allora C è una componente connessa di X oppure una componente connessa di Y.
(3) Si mostri che, se X e Y sono entrambi non vuoti, $X \sqcup Y$ è sconnesso.
(4) Si mostri che $X \sqcup Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y sono compatti.

7. Siano X, Y due spazi topologici, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Denotiamo con $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ il *bouquet* di X e Y (rispetto a x_0, y_0), cioè lo spazio topologico

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) = (X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\}\ .$$

Nel seguito, considereremo fissati x_0, y_0, e indicheremo $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ semplicemente con $X \vee Y$.

(1) Si mostri che le mappe $i\colon X \to X \vee Y$, $j\colon Y \to X \vee Y$ indotte dalle inclusioni di X, Y in $X \sqcup Y$ sono immersioni topologiche.
(2) Si mostri che $X \vee Y$ è connesso se e solo se sia X sia Y lo sono.
(3) Si mostri che $X \vee Y$ è compatto se e solo se sia X sia Y lo sono.
(4) Si mostri che se X e Y sono T_1, allora $i(X)$ e $j(Y)$ sono chiusi in $X \vee Y$ e le mappe i, j sono chiuse.
(5) Si mostri che se X e Y sono T_2, allora $X \vee Y$ è T_2.
(6) Si mostri che se X e Y sono regolari, allora $X \vee Y$ è regolare.
(7) Si mostri che se X e Y sono normali, allora $X \vee Y$ è normale.
(8) Si mostri con un esempio che se X e Y sono T_4, non è detto che anche $X \vee Y$ lo sia.

8. Sia X uno spazio topologico, sia $x_0 \in X$ e siano Y, Z sottospazi chiusi di X tali che $Y \cup Z = X$ e $Y \cap Z = \{x_0\}$. Si mostri che

$$X \ \cong\ (Y, x_0) \vee (Z, x_0)\ .$$

9. Si costruiscano due sottoinsiemi A, B di $\mathbb{R}^2$ tali che $A \cup B = \mathbb{R}^2$, $A \cap B = \{0\}$, ma $(A, 0) \vee (B, 0)$ non sia omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

10. Supponiamo che X, Y siano spazi topologici omogenei (si veda l'Esercizio 6 del Foglio 2). Si mostri che $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ non dipende (a meno di omeomorfismo) dalla scelta di x_0 e y_0, e si può perciò denotare con $X \vee Y$. Se ne deduca che è ben definito $S^1 \vee S^1$.

Sia

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2 - 2x + y^2)(x^2 + 2x + y^2) = 0\} .$$

Si mostri che $S^1 \vee S^1 \;\cong\; X$.

11. Sia X uno spazio topologico. La *sospensione* $S(X)$ di X è definita come segue: posto $Y = X \times [-1, 1]$ (dotato della topologia prodotto) e $(x, t) \sim (y, s)$ se e solo se $(x, t) = (y, s)$, oppure $t = s = -1$, oppure $t = s = 1$, si definisce

$$S(X) = Y/\sim \; .$$

(1) Si mostri che $S(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $S(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se X è T_2, allora $S(X)$ è T_2.
(4) Si mostri che $S(S^n) = S^{n+1}$.

12. Sia X uno spazio topologico. Il *cono* $C(X)$ di X è definito come segue: posto $Y = X \times [0, 1]$ (dotato della topologia prodotto) si pone

$$C(X) = Y/(X \times \{0\}) .$$

Inoltre, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $C'(A) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ponendo

$$C'(A) = \{(ta, 1 - t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid a \in A,\, t \in [0, 1]\} .$$

(1) Si mostri che $C(X)$ è connesso.
(2) Si mostri che $C(X)$ è compatto se e solo se X è compatto.
(3) Si mostri che, se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è compatto, allora $C(A)$ è omeomorfo a $C'(A)$.
(4) Si esibisca un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ per cui $C(A)$ e $C'(A)$ non siano omeomorfi.

13. Siano $r_1, r_2 \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ due rette proiettive distinte.

(1) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus r_1$ sia connesso.
(2) Si dica se $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus (r_1 \cup r_2)$ sia connesso.

14. Sia H un iperpiano $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, e sia $X = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})/H$ lo spazio ottenuto da $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ collassando H ad un punto. Si mostri che X è omeomorfo a S^n.

15. Consideriamo la sfera unitaria S^3 come sottinsieme di $\mathbb{C}^2$ tramite l'identificazione $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, e sia

$$f \colon S^3 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) ,$$

$$f(z_1, z_2) = [(z_1, z_2)] \ .$$

(1) Si mostri che f è un'identificazione chiusa.

(2) Si mostri che, per ogni $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è omeomorfo ad S^1.

Nel secondo semestre dimostreremo tuttavia che S^3 non è omeomorfo a $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times S^1$: dunque, possono esistere mappe surgettive $f \colon X \to Y$ tra varietà compatte tali che $f^{-1}(P) \cong Z$ per ogni $P \in Y$ e $X \ncong Y \times Z$.

16. Sia $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Si dimostri che la mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$ definita da

$$[x, y] \mapsto [x^2, xy, y^2]$$

è ben definita e stabilisce una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e la sua immagine.

(2) Si dimostri che una conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ è omeomorfa a S^2.

(3) Si dimostri che una conica non degenere in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfa a S^1.

17. Sia $\mathbb{K}$ un campo.

(1) Si dimostri che la mappa da $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{K})$ definita da

$$([x, y], [u, v]) \mapsto [xu, xv, yu, yv]$$

è ben definita e stabilisce una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ e la sua immagine.

(2) Si dimostri che una quadrica non degenere in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ è omeomorfa a $S^2 \times S^2$.

(3) Si dimostri che una quadrica di segnatura $(2, 2)$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ è omeomorfa a $S^1 \times S^1$.

18. Sia $n \in \mathbb{N}^+$, e si consideri l'azione del gruppo ciclico $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ su $\mathbb{C}$ data dalla moltiplicazione per radici n-esime dell'unità, cioè $\overline{k} \cdot z = \exp(\frac{2\pi i k}{n})z$, dove $k \in \mathbb{Z}$ è un qualsiasi rappresentante di $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Si dimostri che lo spazio quoziente $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ è omeomorfo al piano complesso $\mathbb{C}$ (suggerimento: si cerchi una opportuna funzione $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-invariante $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

19. Si consideri l'azione di permutazione del gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$ su $\mathbb{C}^n$ data da

$$\sigma(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma^{-1}(n)})$$

per ogni $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Si consideri la mappa $q : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ definita da

$$q(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), \ldots, e_n(\lambda))$$

dove se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, la funzione $e_i(\lambda)$ è definita come come il coefficiente di t^{n-i} nel polinomio $(t + \lambda_1) \cdots (t + \lambda_n)$.

(1) Si dimostri che $q(\lambda) = q(\mu)$ se e solo se λ e μ sono nella stessa $\mathfrak{S}_n$-orbita.

(2) Si dimostri che q è continua e surgettiva.

(3) Si dimostri che se $\|e_i(\lambda)\| \leq R$ per $i = 1, \ldots, n$ allora $\|\lambda_i\| \leq nR + 1$ per $i = 1, \ldots, n$.

(4) Si dimostri che q è propria.

(5) Si dimostri che il quoziente di $\mathbb{C}^n$ per l'azione di $\mathfrak{S}_n$ è omeomorfo a $\mathbb{C}^n$.
(6) Si dimostri che q è aperta.

20. Si consideri lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti complessi. Si dimostri che l'insieme delle matrici che hanno n autovalori distinti è un aperto.

21. Si consideri lo spazio delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che l'insieme delle matrici che hanno n autovalori reali e distinti è un aperto.