Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Foglio di esercizi n.ro 2 del 28/11/2020

Nota: le soluzioni marcate come "**(sketch)**", come suggerisce il nome, non sono complete, e in particolare prenderebbero soltanto un punteggio parziale in un esame scritto.

1. Sia B un insieme infinito, e siano $p, q \in B$, $p \neq q$. Sia $\tau \subseteq \mathcal{P}(B)$ il seguente sottoinsieme delle parti di B: $A \in \tau$ se $A \subseteq B \setminus \{p, q\}$, oppure se $A = B \setminus \{p\}$, $A = B \setminus \{q\}$, $A = B$.

(1) Si dimostri che τ è una topologia su B.
(2) Si esibiscano due sottospazi compatti K_1, K_2 si B tali che $K_1 \cap K_2$ non sia compatto.
(3) Si dica se (B, τ) sia T_1, e se sia T_2.

Soluzione.
(1) Verifichiamo gli assiomi per una topologia.

- Per definizione $B \in \tau$, e dato che $\emptyset \subseteq B \setminus \{p, q\}$, abbiamo anche $\emptyset \in \tau$.
- Siano $A_1, A_2 \in \tau$, e mostriamo che $A_1 \cap A_2 \in \tau$.
  L'asserzione è ovvia se almeno uno tra A_1 e A_2 coincide con B, oppure se $A_1 = A_2$. D'altra parte, se almeno uno tra A_1 e A_2 non contiene né p né q, allora $A_1 \cap A_2 \subseteq B \setminus \{p, q\}$, e quindi sta in τ. Visto che gli unici $A \in \tau$ per cui $p \in A$ sono $B \setminus \{q\}$ e B (e analogamente per q), rimane soltanto da esaminare il caso in cui $A_1 = B \setminus \{p\}$ e $A_2 = B \setminus \{q\}$ o viceversa, nel qual caso $A_1 \cap A_2 = B \setminus \{p, q\}$ è un elemento di τ.
- Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una familgia di sottoinsiemi di τ, e mostriamo che $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$.
  Se per ogni $i \in I$ abbiamo $A_i \subseteq B \setminus \{p, q\}$, allora anche $\cup_{i \in I} A_i \subseteq B \setminus \{p, q\}$, e dunque è un elemento di τ. Altrimenti, se per qualche $i_0 \in I$ l'insieme A_{i_0} contiene p, e dunque contiene $B \setminus \{q\}$, oppure contiene q, e dunque contiene $B \setminus \{p\}$, il sottoinsieme $\cup_{i \in I} A_i$ può essere soltanto uno tra $B \setminus \{p\}$, $B \setminus \{q\}$ e B, che sono tutti elementi di τ.

(2) Poniamo $K_1 = B \setminus \{p\}$ e $K_2 = B \setminus \{q\}$. Controlliamo che K_1, K_2 sono compatti. Notiamo che gli aperti di K_1 sono esattamente

- tutti i sottoinsiemi di $B \setminus \{p, q\} \subseteq K_1$, e
- K_1 stesso

e analogamente per K_2. Ne segue che se $\{A_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di K_1, allora deve esistere $i_0 \in I$ tale che $q \in A_{i_0}$, e per quanto detto l'unica possibilità è che $A_{i_0} = K_1$. Dunque $\{A_{i_0}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\{A_i\}_{i \in I}$, il che mostra che K_1 è compatto. Lo stesso ragionamento applicato a K_2 mostra che anche K_2 ècompatto.

L'intersezione $K_1 \cap K_2$ è $B \setminus \{p, q\}$, che è un insieme infinito con la topologia discreta, quindi non è compatto. (Il ricoprimento aperto costituito da tutti i singoletti non ammette nessun sottoricoprimento finito.)

(3) Lo spazio (B,τ) non è T_1: infatti gli unici aperti che contengono p sono $B \setminus \{q\}$ e B, quindi prendendo $x = p$ e y un qualsiasi elemento di $B \setminus \{p,q\}$ (non vuoto per ipotesi), abbiamo che x e y sono due punti di B distinti, e non esiste un intorno U di x che non contenga y. Non essendo T_1, lo spazio (B,τ) non è nemmeno T_2.

(L'esercizio successivo da una dimostrazione immediata che B non è T_2, visto il punto (2).)

2. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e siano K_1, K_2 sottospazi compatti di X. Si mostri che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

Soluzione.

Essendo X di Hausdorff, i compatti K_1 e K_2 sono chiusi in X. Segue che $K_1 \cap K_2 \subseteq X$ è pure chiuso, e dunque è anche chiuso in K_1. Essendo un chiuso di un compatto, segue che $K_1 \cap K_2$ è compatto.

3. Sia X uno spazio topologico. Si mostri che X verifica l'assioma di separazione T_3 se e solo se ogni punto di X possiede un sistema fondamentale di intorni chiusi.

Soluzione.

Supponiamo che X sia T_3. Fissiamo $x \in X$, e mostriamo che $\{U \in I(x) \mid U \text{ è chiuso}\}$ è un sistema fondamentale di intorni di x. Sia quindi $V \in I(x)$ un intorno qualsiasi di x, e cerchiamo $U \in I(x)$ chiuso, e tale che $U \subseteq V$. Dato che $V \in I(x)$, esiste un aperto $V' \in I(X)$ tale che $V' \subseteq V$. Poniamo $C = X \setminus V'$, un chiuso di X. Visto che X è T_3, $C \subseteq X$ è chiuso e $x \notin C$, possiamo trovare A e B aperti di X tali che $A \cap B = \emptyset$, $x \in A$ e $C \subseteq B$. Visto che $X \setminus B$ è chiuso in X e $A \subseteq X \setminus B$, segue che $\overline{A} \subseteq X \setminus B$, e visto che $C \subseteq B$, abbiamo anche $X \setminus B \subseteq X \setminus C = V'$. Segue quindi che $\overline{A} \subseteq V'$. Ora $U = \overline{A}$ è un intorno chiuso di x (essendo la chiusura dell'intorno A di x) contenuto in V', dunque in V, come volevamo.

Viceversa, supponiamo che ogni punto di X abbia un sistema fondamentale di intorni chiusi. Dati $x \in X$ e $C \subseteq X$ chiuso, tali che $x \notin C$, l'aperto $X \setminus C$ è un intorno di x. Per ipotesi esiste dunque un intorno chiuso U di x, tale che $U \subseteq X \setminus C$, cioé $C \subseteq X \setminus U$. Ora $B = X \setminus U$ e $A = \mathring{U}$ sono aperti di X, tali che $x \in A$ (visto che U è un intorno di x), $C \subseteq B$, e $A \cap B = \emptyset$.

4. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff. Si mostri che se $x \in X$ ammette un intorno compatto, allora ammette un sistema fondamentale di intorni compatti.

Soluzione.

Sia $K \in I(x)$ un intorno compatto di x in X. Visto che K è compatto e di Hausdorff (essendo sottospazio di un Hausdorff), segue che è anche T_3. Per l'esercizio precedente, $x \in K$ ha quindi un sistema fondamentale $\{C_i\}_{i \in I}$ di intorni chiusi (quindi compatti, essendo chiusi in un compatto) in K. Rimane da verificare che $\{C_i\}_{i \in I}$ è un sistema fondamentale di intorni di x in X.

Prima di tutto, per ogni i, l'insieme C_i è un intorno di x in X: infatti, visto che è un intorno di x in K esiste un aperto U di K tale che $x \in U \subseteq C_i$. Inoltre, dato che K è un sottospazio di X, esiste un aperto U' di X tale che $U = K \cap U'$. Ora $U' \cap \mathring{K}$ è un aperto di X contentente x, e contenuto in C_i, che dunque è effettivamente un intorno di x in X.

Sia ora $U \in I(x)$ un intorno di x in X. Allora $U \cap K$ è di nuovo un intorno di x in X, e anche in K (essendo l'inclusione $K \hookrightarrow X$ continua). Segue che esiste $i_0 \in I$ tale che $C_{i_0} \subseteq U \cap K \subseteq U$, e questo mostra che $\{C_i\}_{i \in I}$ è un sistema fondamentale di intorni di x in X.

5. Sia $X = \mathbb{R}^2$, dotato della distanza $d\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $d(x,y) = \|x - y\|$ se x, y sono linearmente dipendenti; $d(x,y) = \|x\| + \|y\|$ se x, y sono linearmente indipendenti. (Tale metrica si chiama la metrica della rete ferroviaria francese; sapreste spiegare perché?).

(1) Si dica quali punti di X ammettono un intorno compatto.
(2) Si esibisca un chiuso limitato di $C \subseteq X$ che non è compatto.
(3) Si dica se la topologia di X sia più fine, meno fine o non comparabile con la topologia Euclidea.
(4) Al variare di $x \in X$, si determini il numero di componenti connesse di $X \setminus \{x\}$.
(5) Si mostri che, se $f\colon X \to X$ è un omeomorfismo, allora $f(0) = 0$ (suggerimento: si usi il punto precedente).

Soluzione.

Il nome della metrica deriva dal noto fatto che per spostarsi tra due punti qualsiasi della Francia in treno, il percorso più corto passa sempre per Parigi.

Notiamo preliminariamente che, per definizione della distanza d, per qualsiasi retta $\ell \subseteq \mathbb{R}^2$ passante per l'origine, la distanza indotta da d su ℓ coincide con la distanza Euclidea.

(1) Tutti i punti di X tranne $(0,0)$ ammettono un intorno compatto.

- Se $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, la palla chiusa $\overline{B}^d(x, \|x\|/2)$ per la distanza d contiene soltanto punti linearmente dipendenti da x (perché se y è linearmente indipendente da x, si ha $d(x,y) = \|x\| + \|y\| \geq \|x\| > \|x\|/2$), e più precisamente è costituita esattamente dai punti della forma λx con $\|x\|/2 \leq \lambda \leq 3\|x\|/2$. Questa palla chiusa è un intorno di x, dato che contiene la palla aperta dello stesso raggio, ed è compatta, essendo omeomorfa a un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$.
- Per quanto riguarda il punto $(0,0)$, supponiamo che U sia un suo intorno. Allora per definizione di intorno esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B^d((0,0), \varepsilon) \subseteq U$. Visto che $d(x,(0,0)) = \|x\|$, abbiamo che $B^d((0,0),\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < \varepsilon\}$.

  Consideriamo ora un sottoinsieme numerabile $\{\ell_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di rette (distinte) passanti per $(0,0)$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliamo arbitrariamente $x_n \in \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = \varepsilon/2\} \cap \ell_n$. Ora la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $B^d((0,0),\varepsilon) \subseteq U$ non ammette sottosuccessioni di Cauchy, dunque non ammette nemmeno sottosuccessioni convergenti, il che mostra che U non può essere compatto (dato che è uno spazio metrico, quindi la compattezza equivale alla compattezza sequenziale). Infatti, visto che per costruzione gli x_n sono a due a due linearmente indipendenti, abbiamo

$d(x_n, x_m) = \|x_n\| + \|x_m\| = \varepsilon$ per ogni $n, m \in \mathbb{N}$, e dunque è chiaro che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non ammette sottosuccessioni di Cauchy.

(2) La palla chiusa $\overline{B}^d((0,0),1)$ per la metrica d è un chiuso limitato di X, ed è anche un intorno di $(0,0)$, quindi per quanto visto al punto precedente non è compatto.

(3) La topologia di X è strettamente più fine della topologia Euclidea.

Infatti, notiamo che la disuguaglianza nota $\|x - y\| \le \|x\| + \|y\|$ implica che $d(x, y) \ge \|x - y\|$ qualsiasi siano $x, y \in X$. Questo mostra che $B^d(x, R) \subseteq B^{\mathrm{Eucl}}(x, R)$ qualsiasi siano $x \in X$ e $R \in \mathbb{R}_{\ge 0}$, e questo implica che se $U \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto Euclideo, allora è anche d-aperto: infatti dato un qualsiasi $x \in U$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B^{\mathrm{Eucl}}(x, \varepsilon) \subseteq U$, e di conseguenza anche $B^d(x, \varepsilon) \subseteq U$.

D'altra parte, la palla aperta $B^d((1, 0), 1/2)$ è costituita (per lo stesso ragionamento fatto al punto (1)) dai punti della forma $(\lambda, 0)$ con $1/2 < \lambda < 3/2$. Questo insieme è quindi d-aperto, ma chiaramente non è un aperto Euclideo, non contenendo nessuna palla aperta Euclidea attorno (ad esempio) al punto $(1, 0)$.

(4) Se $x \neq (0, 0)$, allora $X \setminus \{x\}$ ha due componenti connesse, mentre se $x = (0, 0)$ ne ha infinite (tutte le semirette aperte che partono dall'origine). Usiamo coordinate polari (r, θ) in $\mathbb{R}^2$ con $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$.

Se $x \neq (0, 0)$ ha coordinate polari $x = (r_0, \theta_0)$, allora le due componenti connesse di $X \setminus \{x\}$ sono $\{(r, \theta_0) \mid r > r_0\}$ e il suo complementare. Infatti, il sottoinsieme $\{(r, \theta_0) \mid r > r_0\}$ della retta corrispondente all'angolo θ_0 e privata del punto x è aperto e chiuso in $X \setminus \{x\}$ (chiuso per il punto (3) in quanto è chiaramente un chiuso Euclideo di $X \setminus \{x\}$, e aperto in quanto unione delle palle aperte $B^d(x, (\|x\| - r_0)/2)$, usando quanto visto nella soluzione di (1)), ed è connesso, essendo omeomorfo a una semiretta aperta $(r_0, +\infty)$ (visto che sulle rette passanti per l'origine, la distanza d induce la distanza Euclidea). Il suo complementare è pure aperto e chiuso in $X \setminus \{x\}$ (essendo complementare di un aperto e chiuso), e rimane da verificare che è connesso. Questo segue dal fatto che è unione dei connessi

- $\{(r, \theta_0 \mid r < r_0)\} \cup \{(0, 0)\}$ (omeomorfo a un intervallo $[0, r_0)$ in $\mathbb{R}$),
- $\{(r, \theta_0 + \pi \mid r > 0)\} \cup \{(0, 0)\}$ se $0 \le \theta_0 < \pi$ o $\{(r, \theta_0 - \pi \mid r > 0)\} \cup \{(0, 0)\}$ se $\pi \le \theta_0 < 2\pi$ (la semiretta "opposta", omeomorfa a una semiretta chiusa $[0, +\infty)$), e
- le rette ℓ passanti per $(0, 0)$ e distinte dalla retta corrispondente agli angoli θ_0 e $\theta_0 \pm \pi$, omeomorfe a $\mathbb{R}$,

che si intersecano tutti in $(0, 0)$, dunque la loro unione è ancora un connesso.

Se $x = (0, 0)$, i sottoinsiemi di $X \setminus \{x\}$ dati da $Y_\theta = \{(r, \theta) \mid r > 0\}$ per $\theta \in [0, 2\pi)$ sono tutti aperti e chiusi in $X \setminus \{x\}$ (per gli stessi ragionamenti di cui sopra). Infine, gli Y_θ sono anche connessi, essendo omeomorfi a $(0, +\infty)$, e dunque sono le componenti connesse di $X \setminus \{x\}$.

(5) Un omeomorfismo $f\colon X \to X$ induce, per qualsiasi $x \in X$, un omeomorfismo $f_x\colon X \setminus \{x\} \to X \setminus \{f(x)\}$, il quale a sua volta induce una bigezione tra le componenti connesse di $X \setminus \{x\}$ e le componenti connesse di $X \setminus \{f(x)\}$. Per il risultato del punto (4), segue che necessariamente $f((0, 0)) = (0, 0)$.

6. Uno spazio topologico X si dice *omogeneo* se per ogni coppia di punti $x, x' \in X$ esiste un omeomorfismo $f\colon X \to X$ tale che $f(x) = x'$.

(1) Si mostri che S^1 è omogeneo.
(2) Si mostri che S^n è omogeneo per ogni $n \geq 2$ (suggerimento: si sfrutti $O(n+1)$).
(3) Si mostri che $(0,1)$ è omogeneo.
(4) Si mostri che $[0,1]$ non è omogeneo.

Soluzione.

(1) Dati $x, x' \in S^1$, scriviamo $x = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ e $x' = (\cos\beta, \sin\beta)$ con $\alpha, \beta \in [0, 2\pi)$. Allora la rotazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ attorno all'origine di un angolo $\beta - \alpha$, rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta-\alpha) & -\sin(\beta-\alpha) \\ \sin(\beta-\alpha) & \cos(\beta-\alpha) \end{pmatrix},$$

è un omeomorfismo, essendo una funzione lineare invertibile, che si restringe a un omeomorfismo $g\colon S^1 \to S^1$, tale che $g(x) = x'$.

(2) Analogamente, dati $x, x' \in S^n$, esiste una rotazione $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ in $O(n+1)$ tale che $f(x) = x'$ (ad esempio, si possono completare $\{x\}$ e $\{x'\}$ a due basi ortonormali, e considerare la matrice di cambiamento di base). La funzione f è un omeomorfismo, essendo una funzione lineare invertibile, e si restringe a un omeomorfismo $g\colon S^n \to S^n$ tale che $g(x) = x'$.

(3) Ricordiamo che esiste un omeomorfismo $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$. Ora $\mathbb{R}$ è omogeneo, visto che dati $y, y' \in \mathbb{R}$, la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $t \mapsto t + y' - y$ è un omeomorfismo, essendo una funzione lineare invertibile, che manda y in y'. Quindi, dati $x, x' \in (0,1)$, se $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è un omeomorfismo tale che $g(f(x)) = f(x')$, la funzione $f^{-1} \circ g \circ f$ è un omeomorfismo $(0,1) \to (0,1)$ che manda x in $f^{-1}(g(f(x))) = f^{-1}(f(x')) = x'$.

(4) Non esiste nessun omeomorfismo $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tale che $f(0) = 1/2$. Se esistesse, indurrebbe un omeomorfismo $g\colon (0,1] \to [0,1] \setminus \{1/2\}$, ma questi due spazi non sono omeomorfi, dato che $(0,1]$ è connesso mentre $[0,1] \setminus \{1/2\}$ non lo è.

7. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione tra spazi topologici.

(1) Si assuma che Y sia di Hausdorff. Si mostri che, se f è continua, allora il grafico di f è un chiuso di $X \times Y$.
(2) Si supponga che Y sia compatto. Si mostri che la proiezione $\pi\colon X \times Y \to X$ sul primo fattore è chiusa.
(3) Si supponga che Y sia compatto e di Hausdorff. Si mostri che f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso.

Soluzione.

(1) Visto che Y è di Hausdorff, la diagonale

$$\Delta_Y = \{(y,y) \mid y \in Y\} \subseteq Y \times Y$$

è un chiuso per la topologia prodotto. Ora la funzione $F\colon X \times Y \to Y \times Y$ data da $F(x,y) = (f(x), y)$ è continua (in quanto le due componenti sono funzioni continue), e il grafico di f è esattamente la preimmagine $F^{-1}(\Delta_Y) \subseteq X \times Y$, e dunque è un chiuso.

(2) Sia $C \subseteq X \times Y$ un chiuso. Se $\pi(C) = X$, allora l'immagine di C è un chiuso, quindi possiamo supporre che $\pi(C) \neq X$, e mostrare che il complementare $X \setminus \pi(C)$ è aperto. Fissiamo quindi $x \in X \setminus \pi(C)$. Questo implica che per ogni $y \in Y$ abbiamo $(x, y) \in X \times Y \setminus C$, e visto che C è chiuso (e dunque il suo complementare è aperto), possiamo trovare un aperto di base $U_y \times V_y$ di $X \times Y$ (con $U_y \subseteq X$ e $V_y \subseteq Y$ aperti) tale che $(x, y) \in U_y \times V_y \subseteq X \times Y \setminus C$, in particolare $x \in U_y$ e $y \in V_y$.

Ora, la famiglia $\{V_y\}_{y \in Y}$ è un ricoprimento aperto di Y. Per compattezza di Y, esistono un numero finito di elementi $y_1, \ldots, y_k$ tali che $\{V_{y_i}\}_{i=1,\ldots,k}$ è ancora un ricoprimento aperto di Y. Poniamo $U = \cap_{i=1}^k U_{y_i}$. Questo è un aperto di X (essendo intersezione finita di aperti), e $x \in U$, poichè $x \in U_y$ per ogni $y \in Y$.

Per concludere, controlliamo che $U \subseteq X \setminus \pi(C)$, il che mostra che $X \setminus \pi(C)$ è aperto in X. Infatti, se avessimo $x' \in U \cap \pi(C)$, esisterebbe $y' \in Y$ tale che $(x', y') \in C$. Visto che $\{V_{y_i}\}_{i=1,\ldots,k}$ è un ricoprimento di Y, avremmo $y' \in V_{y_j}$ per un qualche $j \in \{1, \ldots, k\}$, quindi $(x', y') \in U_{y_j} \times V_{y_j} \subseteq X \times Y \setminus C$, che contraddice $(x', y') \in C$.

(3) Per il punto (1), se Y è di Hausdorff e f è continua, il suo grafico è chiuso in $X \times Y$. Supponiamo ora che Y sia compatto, e mostriamo che se il grafico Γ_f di f è un chiuso in $X \times Y$, allora f è continua (l'ipotesi che Y sia Hausdorff in realtà per questa implicazione non servirà).

Osserviamo che la restrizione della prima proiezione $\pi_1 \colon X \times Y \to X$ al grafico $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ è un omeomorfismo $\Gamma_f \to X$. Infatti è una funzione continua (essendo restrizione della funzione continua π_1 a un sottospazio), biuonivoca (per definizione di grafico), e chiusa: se $Z \subseteq \Gamma_f$ è un chiuso, allora Z è anche un chiuso di $X \times Y$ (essendo Γ_f chiuso in $X \times Y$), e dunque per il punto (2) segue che $\pi_1(Z)$ è chiuso in X. Inoltre, l'inverso di questo omeomorfismo è la funzione $F \colon X \to \Gamma_f$ che manda x in $(x, f(x))$ (che quindi in particolare è continua).

Visto che $f \colon X \to Y$ è la composizione di questa F con la restrizione della seconda proiezione $\pi_2 \colon X \times Y \to Y$ al sottospazio Γ_f, entrambe funzioni continue, possiamo concludere che anche f è continua.

8. Sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to S^1 \times S^1$, $f(x, y) = ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sia $r_a \subseteq \mathbb{R}^2$ la retta di equazione $y = ax$. Si determini:

(1) Per quali valori di a l'insieme $f(r_a)$ è denso in $S^1 \times S^1$.
(2) Per quali valori di a il sottospazio $f(r_a) \subseteq S^1 \times S^1$ è compatto.

Per lo svolgimento dell'esercizio, si può assumere (o dimostrare!) il seguente fatto: se $a \in \mathbb{R}$ è irrazionale, allora l'insieme delle parti frazionarie dei valori an, $n \in \mathbb{Z}$, è denso in $[0, 1]$. La parte frazionaria di un numero reale x è la differenza tra x e la sua parte intera (ed appartiene perciò a $[0, 1)$).

Soluzione.

(sketch) L'insieme $f(r_a)$ è denso in $S^1 \times S^1$ esattamente per a irrazionale, mentre è compatto esattamente per a razionale.

Ricordiamo che f è una identificazione, e la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$ indotta dalla mappa f corrisponde a quella indotta dall'azione per traslazione del sottogruppo $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Se $a = \frac{p}{q}$ è razionale con p, q coprimi, allora si vede facilmente che $f^{-1}(f(r_a))$ è l'unione delle rette di equazione $y = \frac{p}{q}(x + k) + h$ al variare di $k, h \in \mathbb{Z}$. Dal fatto che p, q sono coprimi segue che questa famiglia di rette coincide con le famiglia di rette di equazione $y = \frac{p}{q}x + \frac{k'}{q}$ al variare di $k' \in \mathbb{Z}$. L'unione di queste rette è quindi un chiuso di $\mathbb{R}^2$ (il complementare è unione di strisce aperte, che sono aperti), ed è saturo rispetto alla funzione f. Segue che l'immagine $f(r_a)$ è chiusa in $S^1 \times S^1$, e dunque è compatta, visto che è chiuso di un compatto. In particolare non è un sottoinsieme denso, perché in tal caso, essendo chiuso, dovrebbe coincidere con $S^1 \times S^1$.

Ora se invece a è irrazionale, mostriamo che $f^{-1}(f(r_a))$ è denso in $\mathbb{R}^2$. Da questo seguirà che $f(r_a)$ è denso in $S^1 \times S^1$. Infatti in generale, se $U \subseteq X$ è denso e $f: X \to Y$ è una funzione continua e suriettiva, allora $f(U)$ è denso in Y: questo segue da $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ in Y, che, visto che $\overline{U} = X$ e f è suriettiva, implica $Y \subseteq \overline{f(U)}$, dunque $\overline{f(U)} = Y$.

(Dimostrazione del fatto che se $Z \subseteq X$ è un sottoinsieme e $f: X \to Y$ è continua, allora $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$: se $y \in f(\overline{Z})$, fissiamo $x \in \overline{Z}$ tale che $f(x) = y$, e se U è un qualsiasi intorno di y in Y, $f^{-1}(U)$ è un intorno di x in X, e dunque $f^{-1}(U) \cap Z \neq \emptyset$; se z è un punto di questa intersezione, abbiamo che $f(z) \in U \cap f(Z)$, e questo mostra che $y \in \overline{f(Z)}$).)

Per mostrare che $f^{-1}(f(r_a))$ è denso in $\mathbb{R}^2$, possiamo mostrare che interseca qualsiasi aperto di base non vuoto $I \times J$, dove I e J sono intervalli aperti in $\mathbb{R}$. Notiamo innanzitutto che, come nel caso precedente, $f^{-1}(f(r_a))$ è l'unione delle rette (parallele) di equazione $y = ax + (ak + h)$, dove $k, h \in \mathbb{Z}$. Le intersezioni di queste rette con l'asse y sono date dai punti $(0, ak + h)$, e visto che l'insieme delle parti frazionarie di ak con $k \in \mathbb{Z}$ è denso in $[0, 1]$, segue che l'insieme dei punti della forma $(0, ak + h)$ con $k, h \in \mathbb{Z}$ è denso nell'asse y.

A questo punto, dato un aperto di base non vuoto $I \times J$ come sopra, fissiamo $(x_0, y_0) \in I \times J$, e consideriamo l'intervallo aperto $J - ax_0$ (cioè, se $J = (\alpha, \beta)$, consideriamo $(\alpha - ax_0, \beta - ax_0)$) sull'asse y. Visto che questo è un aperto non vuoto, per quanto visto al paragrafo precendente esisono $h_0, k_0 \in \mathbb{Z}$ con $ak_0 + h_0 \in J - ax_0$. Segue che il punto $(x_0, ax_0 + ak_0 + h_0)$ sta in $I \times J$, e appartiene alla retta di equazione $y = ax + (ak_0 + h_0)$, dunque sta anche in $f^{-1}(f(r_a))$.

Per completezza, includiamo anche uno sketch della dimostrazione del fatto che se a è irrazionale, allora l'insieme delle parti frazionarie di an è denso in $[0, 1]$. Notiamo innanzitutto che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esistono due interi distinti $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che

$$0 < |\{an\} - \{am\}| \leq \frac{1}{k}$$

(qui $\{x\}$ indica la parte frazionaria di x). Questo segue dal fatto che, visto che a è irrazionale, tutti i numeri $\{an\}$ sono distinti, quindi sono infiniti, e dunque ce ne devono essere almeno due nello stesso sottoinsieme della partizione $[0, \frac{1}{k}], (\frac{1}{k}, \frac{2}{k}], \ldots, (\frac{k-1}{k}, 1]$.

Da questo segue che $0 < |\{a(n - m)\}| \leq \frac{1}{k}$, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{Z}$ tale che $0 < |\{an_0\}| \leq \frac{1}{k}$. Dato un aperto di base (α, β) di $[0, 1]$ (per i casi $[0, \beta)$ e $(\alpha, 1]$ il ragionamento è analogo), basta considerare $k \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{k} < \beta - \alpha$, e l'$n_0 \in \mathbb{Z}$ corrispondente. Da quanto visto, e considerando che se per $r \in \mathbb{N}$ (e diciamo $n_0 > 0$) abbiamo $r\{an_0\} < 1$, allora $r\{an_0\} = \{a(rn_0)\}$, segue che c'è necessariamente un qualche numero della forma $\{an\}$ in (α, β), con n un multiplo di n_0.

9. Sia X uno spazio topologico metrizzabile separabile, e sia $D \subseteq X$ un sottoinsieme discreto (non necessariamente chiuso). Si mostri che D è al più numerabile.

Soluzione.

Sia $Z \subseteq X$ un sottoinsieme numerabile denso, e fissiamo una distanza d su X che induca la topologia data. Per dimostrare che D è al più numerabile, costruiamo una funzione iniettiva $f\colon D \to Z$. Visto che D è discreto, per ogni $x \in D$ esiste un aperto U_x di X tale che $U_x \cap D = \{x\}$. Visto che le palle aperte sono una base della topologia di X, possiamo anche trovare un raggio $R_x > 0$ tale che $B(x, R_x) \cap D = \{x\}$. Inoltre, poiché Z è denso in X e $B(x, R_x/2)$ è un aperto non vuoto di X, esiste $z_x \in B(x, R_x/2) \cap Z$. Poniamo $f(x) = z_x \in Z$.

Mostriamo che la funzione $f\colon D \to Z$ così costruita è iniettiva. Infatti, se $f(x) = f(x')$, e supponendo senza perdita di generalità che $R_x \geq R'_x$, abbiamo che $z_x = z_{x'}$ sta in $B(x, R_x/2)$, quindi $d(x, z_x) < R_x/2$, e sta anche in $B(x', R_{x'}/2)$, quindi $d(x', z_x) < R_{x'}/2 \leq R_x/2$. Dalla disuguaglianza triangolare ne deduciamo che $d(x, x') \leq d(x, z_x) + d(z_x, x') < R_x$, dunque $x' \in B(x, R_x) \cap D = \{x\}$, quindi necessariamente $x' = x$.

10.

(1) Siano X uno spazio topologico, e $\mathcal{B}$ una base delle topologia di X. Si mostri che X è I-numerabile se e solo se ogni punto $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile e costituito da elementi di $\mathcal{B}$.

(2) Sia
$$X = [0,1]^{[0,1]} = \prod_{x \in [0,1]} [0,1]$$
l'insieme delle funzioni $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dotato della topologia prodotto, e $Y \subseteq X$ il sottospazio dato dalle funzioni a supporto numerabile (ricordiamo che il supporto di una tale f è l'insieme degli $x \in [0,1]$ tali che $f(x) \neq 0$). Si mostri che Y non è I-numerabile.

Soluzione.

(1) Se ogni $x \in X$ ha un sistema fondamentale di intorni numerabile e costituito da elementi di $\mathcal{B}$, ovviamente X è I-numerabile. Viceversa, fissiamo $x \in X$, e $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile di x. Per definizione di intorno e di base di una topologia, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $B_n \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B_n \subseteq U_n$. Chiaramente ogni B_n, essendo aperto e contenendo il punto x, è un intorno di x. Mostriamo che $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di x. Sia $V \in I(x)$ un intorno di x. Allora visto che $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di x, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $U_{n_0} \subseteq V$. Per costruzione segue $x \in B_{n_0} \subseteq U_{n_0} \subseteq V$, il che mostra che $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è un sistema fondamentale di intorni di x.

(2) Ricordiamo che una base della topologia di X è data da sottoinsiemi della forma $A = \prod_{x \in [0,1]} A_x$, dove $A_x \subseteq [0,1]$ è aperto, e per tutti gli x meno un numero finito, che indichiamo con $x_1, \ldots, x_k$, si ha $A_x = [0,1]$. Inoltre, visto che una base della topologia di $[0,1]$ è data da sottoinsiemi della forma $(a_i, b_i) \cap [0,1]$ con $a_i < b_i$ in $\mathbb{R}$ (dove permettiamo

che $a_i < 0$ oppure $b_i > 1$, per includere aperti della forma $[0, b_i), (a_i, 1]$, e $[0, 1]$ stesso), possiamo anche restringerci ad aperti A come sopra per cui $A_{x_i} = (a_i, b_i) \cap [0, 1]$ per $i = 1, \dots, k$.

In termini di funzioni $f : [0, 1] \to [0, 1]$, abbiamo che $f \in A$ come sopra se e solo se $f(x_i) \in (a_i, b_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k$ (mentre sugli altri valori presi da f non c'è nessuna condizione). Inoltre, una base di Y è costituita dalle intersezioni $A \cap Y$, dove A è un aperto di questa forma.

Mostriamo che la funzione costante zero, $f_0(x) = 0$ per ogni $x \in [0, 1]$, che è un elemento di Y, non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile in Y. Infatti, per la soluzione del punto (1), se per assurdo f_0 avesse un sistema fondamentale di intorni numberabile, ne avrebbe uno numerabile e costituito da elementi della base che abbiamo appena descritto. Supponiamo quindi che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni di f_0 in Y della forma che abbiamo descritto, e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ scriviamo $A_n = (\prod_{x\in[0,1]} A^n_x) \cap Y$, dove $A^n_x = [0, 1]$ per tutti gli x tranne al più per $x^n_1, \dots, x^n_{k_n} \in [0, 1]$, e $A^n_{x_i} = (a^n_i, b^n_i) \cap [0, 1]$ per $a^n_i < b^n_i$ in $\mathbb{R}$. Ricordiamo che una generica funzione $f \in Y$ è un elemento di A_n se e solo se $f(x^n_i) \in (a^n_i, b^n_i)$ per ogni $i = 1, \dots, k_n$. Inoltre notiamo che $0 \in (a^n_i, b^n_i)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $i = 1, \dots, k_n$, visto che $f_0 \in A_n$.

Sia $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x^n_1, \dots, x^n_{k_n}\}$. Essendo unione numerabile di insiemi finiti, Z è un sottoinsieme numerabile di $[0, 1]$. Fissiamo $z \in [0, 1]\setminus Z$, e consideriamo $U = (\prod_{x\in[0,1]} U_x)\cap Y \subseteq Y$ dove $U_x = [0, 1]$ se $x \neq z$, e $U_z = [0, 1/2)$. Questo è un aperto di Y e $f_0 \in U$, dunque U è un intorno di f_0 in Y. Inoltre, $A_n \nsubseteq U$ qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$: infatti la funzione $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ definita da $f_n(x) = 0$ se $x \neq z$ e $f(z) = 1$, per costruzione è un elemento di A_n che non sta in U. Questo contraddice il fatto che $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia un sistema fondamentale di intorni di f_0 in Y.

11. Sia X uno spazio di Hausdorff compatto, e sia C_n, $n \in \mathbb{N}$, una famiglia di chiusi non vuoti tali che $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $C_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

(1) Si mostri che se C_n è connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso.
(2) È vero che se C_n è connesso per archi per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora C_∞ è connesso per archi?

Soluzione.

(1) Supponiamo per assurdo che C_∞ sia sconnesso, quindi che esistano $Z, W \subseteq C_\infty$ chiusi disgiunti non vuoti, e tali che $C_\infty = Z \cup W$. Visto che $C_\infty \subseteq X$ è chiuso, essendo intersezione di chiusi, segue che Z, W sono anche chiusi in X. Inoltre X è di Hausdorff compatto, dunuque è T_4. Di conseguenza, esistono $U, V \subseteq X$ aperti disgiunti e tali che $Z \subseteq U$ e $W \subseteq V$ (dunque $U \cap C_\infty = Z$ e $V \cap C_\infty = W$). Poniamo ora $Y_n = C_n \setminus (U \cup V)$. Poichè $U \cup V$ è aperto in X, abbiamo che $Y_n \subseteq X$ è chiuso (essendo intersezione di due chiusi). Inoltre abbiamo $Y_{n+1} \subseteq Y_n$, e

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} Y_n = \cap_{n\in\mathbb{N}}(C_n \setminus (U \cap V)) = C_\infty \setminus U \cup V = \emptyset,$$

visto che $(U \cup V) \cap C_\infty = (U \cap C_\infty) \cup (V \cap C_\infty) = Z \cup W = C_\infty$.

Per compattezza di X segue quindi che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $Y_{n_0} = \emptyset$. Di conseguenza possiamo scrivere $C_{n_0} = (U \cap C_{n_0}) \cup (V \cap C_{n_0})$ come unione dei due aperti disgiunti (visto che $U \cap V = \emptyset$ in X) e non vuoti (visto che $Z \subseteq U \cap C_{n_0}$ e $W \subseteq V \cap C_{n_0}$), il che contraddice la connessione di C_{n_0}.

(2) **(sketch)** L'enunciato analogo per la connessione per archi è falso. Sia $X = [0,1] \times [-1,1]$, e $Y \subseteq X$ il sottoinsieme dato da $(\{0\} \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\}$. Poniamo inoltre $C_n = Y \cup ([0, \frac{1}{n}] \times [-1,1])$. Abbiamo che C_n è chiuso in X, $C_{n+1} \subseteq C_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $\cap_{n \in \mathbb{N}} C_n = Y$. Infine, C_n è connesso per archi per ogni $n \in \mathbb{N}$ (essendo unione $([0, \frac{1}{n}] \times [-1,1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in (0,1]\}$ di due sottoinsiemi connessi per archi con intersezione non vuota), ma $C_\infty = Y$ non è connesso per archi.

12. Sia X uno spazio topologico connesso, e sia $f \colon X \to \mathbb{R}$ una funzione localmente costante, ovvero supponiamo che per ogni $p \in X$ esista un intorno U_p di p in X tale che $f|_{U_p}$ sia costante. Si mostri che f è costante.

Soluzione.

Fissiamo $p_0 \in X$ (il fatto che $\emptyset$ sia connesso o meno è questione di convenzioni - noi qui supponiamo che $X \neq \emptyset$), poniamo $R = f(p_0) \in \mathbb{R}$, e consideriamo $Y = \{p \in X \mid f(p) = R\} \subseteq X$. Mostriamo che X è aperto e chiuso in X. Visto che Y è non è vuoto (dato che contiene almeno p_0) e X è connesso, segue che deve essere $Y = X$, quindi $f(p) = R$ per ogni $p \in X$, cioè f è costante.

Abbiamo che Y è aperto: infatti, dato $q \in Y$, per ipotesi esiste un intorno U_q di q in X tale che $f(p) = f(q) = R$ per ogni $p \in U_q$. Dunque $U_q \subseteq Y$, e segue che Y contiene un intorno di ogni suo punto, quindi è aperto.

Mostriamo ora che Y è chiuso, facendo vedere che $X \setminus Y$ è aperto. Infatti se $q \in X \setminus Y$, abbiamo $f(q) \neq R$. Di nuovo per ipotesi, esiste un intorno U_q di q in X tale che $f(p) = f(q) \neq R$ per ogni $p \in U_q$. Quindi $U_q \subseteq X \setminus Y$, e segue che $X \setminus Y$ contiene un intorno di ogni suo punto, quindi è aperto.

13. Sfruttando l'esercizio 1, si costruisca uno spazio topologico X connesso per archi con $|X| \geq 2$ contenente un aperto U totalmente sconnesso.

Soluzione.

(sketch) Consideriamo lo spazio $X = B$ dell'esercizio 1. Il sottoinsieme $U = B \setminus \{p, q\}$ è aperto per definizione della topologia τ, ed è totalmente sconnesso, visto che la topologia indotta su U è la topologia discreta.

Mostriamo che B è connesso per archi. Infatti, se $x \in B \setminus \{p, q\}$, consideriamo la funzione $\gamma \colon [0,1] \to B$ data da $\gamma(t) = x$ se $t < 1$, e $\gamma(1) = p$. Questa funzione è continua, quindi tutti i punti di $B \setminus \{p, q\}$ si possono collegare a p tramite un arco. Analogamente si vede che tutti i punti di $B \setminus \{p, q\}$ si possono collegare a q tramite un arco, e da questo segue che X è connesso per archi.

14. Sia X uno spazio topologico T_1, connesso per archi e con $|X| \geq 2$, e sia U un aperto di X. Si mostri che U non può essere totalmente sconnesso.

Soluzione.

Supponiamo che $U \neq \emptyset$, per evitare questioni sulla totale sconnessione o meno dell'insieme vuoto, e supponiamo per assurdo che, nelle ipotesi del problema, U sia totalmente sconnesso.

Notiamo innanzitutto che deve essere $X \setminus U \neq \emptyset$: infatti U è totalmente sconnesso mentre X è connesso per archi (dunque connesso), e se per assurdo $X = U$, lo spazio U deve essere pure connesso, cosa che non è possibile non appena $|U| \geq 2$, e questo è assicurato in questo caso dall'ipotesi che $|X| \geq 2$.

Fissiamo quindi $x \in X \setminus U$, e $y \in U$. Visto che X è connesso per archi, esiste $\gamma\colon [0,1] \to X$ continua e tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Mostreremo che deve anche essere necessariamente $\gamma(t) = y$ per ogni $t \in [0,1]$, il che darà un assurdo.

Visto che X è T_1, i suoi punti sono chiusi, quindi per continuità di γ segue che $\gamma^{-1}(y) \subseteq [0,1]$ è un chiuso. Sia C la componente connessa di $\gamma^{-1}(y)$ contenente il punto 1. Ricordiamo che C è un chiuso di $\gamma^{-1}(y)$, quindi anche un chiuso di $[0,1]$, essendo un chiuso di un suo chiuso. Mostreremo anche che $C \subseteq [0,1]$ è aperto, e seguirà, per connessione di $[0,1]$, che $C = [0,1]$, da cui $\gamma(t) = y$ per ogni $t \in [0,1]$.

Per continuità di γ, il sottoinsieme $\gamma^{-1}(U) \subseteq [0,1]$ è un aperto contenente l'elemento 1. Sia D la componente connessa di $\gamma^{-1}(U)$ che contiene 1. Notiamo che, visto che $C \subseteq \gamma^{-1}(U)$ e C è connesso e contiene 1, abbiamo $C \subseteq D$. Ora poiché D è connesso e γ è continua, $\gamma(D) \subseteq U$ è pure connesso, e visto che U è totalmente sconnesso e $1 \in D$, segue che $\gamma(D) = \{y\}$. In altre parole abbiamo anche $D \subseteq \gamma^{-1}(y)$, il che mostra (di nuovo visto che D è connesso e contiene 1) che $D \subseteq C$, e dunque che $C = D$.

Infine, visto che $\gamma^{-1}(U)$ è localmente connesso, essendo sottospazio aperto dello spazio localmente connesso $[0,1]$, la componente connessa D è un aperto di $\gamma^{-1}(U)$, e dunque anche un aperto di $[0,1]$. Visto che $C = D \subseteq [0,1]$ è non vuoto, aperto e chiuso, concludiamo che $C = [0,1]$, come volevamo.

15. Sia $X = \mathbb{R}$, dotato della topologia i cui chiusi sono $\mathbb{R}$ stesso, e i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ aventi cardinalità al più numerabile. Si dica se X sia connesso, connesso per archi, compatto.

Soluzione.

Lo spazio X è connesso, non compatto e non connesso per archi.

Per la connessione, supponiamo che $A \subseteq X$ sia aperto, chiuso e non vuoto, e mostriamo che è necessariamente tutto X. Per definizione della topologia, se $A \neq X$, visto che A è chiuso abbiamo $|A| \leq |\mathbb{N}|$, e visto che $X \setminus A$ è pure chiuso e diverso da X, abbiamo $|X \setminus A| \leq |\mathbb{N}|$. Segue che $|X| = |\mathbb{R}| = |A \cup (X \setminus A)| = |A| + |X \setminus A| = |\mathbb{N}| + |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$, che è assurdo.

Per la compattezza, poniamo $C_n = 2^n \cdot \mathbb{Z} \subseteq X$ per $n \in \mathbb{N}$. Questi sottoinsiemi sono numerabili, quindi chiusi di X, e chiaramente abbiamo $C_{n+1} \subseteq C_n$. Infine, $\cap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$ (non c'è nessun numero intero divisibile per 2^n qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$), e dunque segue che X non è compatto.

Per la connessione per archi, dimostriamo che se $\gamma\colon [0,1] \to X$ è una funzione continua, allora è costante. Questo implica che X non è connesso per archi. Consideriamo $D =$

$[0,1] \cap \mathbb{Q}$, un sottoinsieme numerabile denso. Abbiamo quindi

$$\gamma([0,1]) = \gamma(\overline{D}) \subseteq \overline{\gamma(D)} = \gamma(D)$$

dove abbiamo usato che

- se $Z \subseteq X$ è un sottoinsieme di uno spazio topologico X e $f\colon X \to Y$ è una funzione continua, allora $f(\overline{Z}) \subseteq \overline{f(Z)}$ (visto nella soluzione dell'esercizio 8), e
- $\gamma(D)$ è chiuso in X, essendo al più numerabile.

Ora per concludere mostriamo che se $Y \subseteq X$ è un sottoinsieme al più numerabile, allora la topologia di sottospazio su Y è la topologia discreta, e in particolare Y è totalmente sconnesso. Infatti se $y \in Y$, abbiamo che $Y \setminus \{y\}$ è ancora al più numerabile, quindi è chiuso (in X, quindi) in Y, dunque $\{y\}$ è aperto in Y. Visto che tutti i singoletti sono aperti, la topologia di Y è la topologia discreta.

Questo implica che l'immagine di $\gamma([0,1])$ in $\gamma(D) \subseteq X$, dovendo essere connessa (visto che è immagine continua del connesso $[0,1]$), deve essere un punto, il che mostra che γ è costante.

16. Sia $X = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1x_2 = x_3x_4\}$. Quante componenti connesse ha $\mathbb{R}^4 \setminus X$? Si mostri che ogni componente connessa di $\mathbb{R}^4 \setminus X$ è omeomorfa a $S^1 \times \mathbb{R}^3$. (Suggerimento: si cerchi preliminarmente un omeomorfismo di $\mathbb{R}^4$ che porta X nell'insieme di equazione $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$).

Soluzione.

L'omeomorifsmo lineare $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ il cui inverso è dato da $(y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto (y_1 - y_3, y_1 + y_3, y_4 - y_2, y_4 + y_2)$ manda il luogo di equazione $x_1x_2 = x_3x_4$ nel luogo di equazione $y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2$, come si vede immediatamente sostituendo $x_1 = y_1 - y_3, x_2 = y_1 + y_3, x_3 = y_4 - y_2, x_4 = y_4 + y_2$. Se $Y = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 + y_4^2\}$, possiamo quindi lavorare con $\mathbb{R}^4 \setminus Y$ invece che con $\mathbb{R}^4 \setminus X$.

Consideriamo la funzione continua $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2.$$

Abbiamo che $Y = g^{-1}(0)$. Consideriamo i due sottoinsiemi di $\mathbb{R}^4 \setminus Y$ dati da $C_1 = g^{-1}(-\infty, 0)$ e $C_2 = g^{-1}(0, +\infty)$. Questi sono aperti e chiusi, essendo g continua ed essendo $(-\infty, 0)$ e $(0, +\infty)$ aperti e chiusi di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mostreremo ora che sono connessi, e quindi sono le componenti connesse di $\mathbb{R}^4 \setminus Y$.

Per mostrare che sono connessi, raccogliamo il suggerimento (nascosto) dell'esercizio, e dimostriamo direttamente che C_1 e C_2 sono omeomorfi a $\mathbb{R}^3 \times S^1$ (che è uno spazio connesso, essendo prodotto di connessi). Consideriamo C_2 (la dimostrazione per C_1 è analoga).

Scriviamo esplicitamente un omeomorfismo, assieme alla funzione inversa. Consideriamo $\varphi\colon C_2 \to \mathbb{R}^3 \times S^1$ che manda (y_1, y_2, y_3, y_4) (tali che $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 > 0$, visto che siamo in C_2) in

$$\varphi(y_1, y_2, y_3, y_4) = \left(\log(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2), y_3, y_4, \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\right)\right)$$

(notare che almeno uno tra y_1 e y_2 deve essere diverso da zero, visto che $y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2 > 0$), dove come sempre vediamo $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ come i punti della forma (α, β) con $\alpha^2+\beta^2=1$. Questa funzione è continua, visto che tutte le componenti sono funzioni continue.

Scriviamo ora l'inversa $\psi\colon \mathbb{R}^3 \times S^1 \to C_2$, che è data da

$$\psi(x,y,z,(\alpha,\beta)) = (\alpha\sqrt{e^x+y^2+z^2}, \beta\sqrt{e^x+y^2+z^2}, y, z)$$

ed di nuovo è una funzione continua in quanto le componenti (della funzione verso $\mathbb{R}^4$) lo sono, e per la proprietà universale della topologia di sottospazio di $C_2 \subseteq \mathbb{R}^4$.

È immediato verificare che ψ e φ sono inverse, e quindi, essendo entrambe continue, sono omeomorfismi.

17. Si dimostri che $\mathbb{R}\times(0,1)$ e $\mathbb{R}\times[0,1]$ non sono omeomorfi (suggerimento: si esaminino opportune esaustioni in compatti).

Soluzione.

(sketch) Consideriamo l'esaustione in compatti di $X_1 = \mathbb{R}\times(0,1)$ data da $K_n = [-n,n]\times[\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ e l'esaustione in compatti di $X_2 = \mathbb{R}\times[0,1]$ data da $H_n = [-n,n]\times[0,1]$. Abbiamo $|\pi_0(X_1 \setminus K_n)| = 1$ e $|\pi_0(X_2 \setminus H_n)| = 2$ per ogni n. È inoltre facile verificare che le due esaustioni soddisfano le condizioni viste alla fine della lezione del 26/11/2020, da cui segue che X_1 non è omeomorfo a X_2.

18. Siano $n,m,p,q \in \mathbb{N}$ con $n,m \geq 1$ e $p \neq q$. Fissiamo inoltre p punti distinti $x_1,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^n$ e q punti distinti $y_1,\ldots,y_q \in \mathbb{R}^m$. Si mostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1,\ldots,x_p\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^m \setminus \{y_1,\ldots,y_q\}$ (suggerimento: si esaminino opportune esaustioni in compatti).

Soluzione.

Poniamo $X_1 = \mathbb{R}^n \setminus \{x_1,\ldots,x_p\}$ e $X_2 = \mathbb{R}^m \setminus \{y_1,\ldots,y_q\}$.

Supponiamo prima di tutto che almeno uno tra n e m sia 1 (diciamo $n=1$, senza perdita di generalità). Allora, se $X_1 \cong X_2$, segue che deve essere anche $m=1$. Infatti, se per assurdo avessimo $m>1$, lo spazio X_2 sarebbe connesso, e rimarrebbe connesso anche togliendo un punto, mentre X_1 meno un punto è sicuramente sconnesso. Ora il numero di componenti connesse di $X_1 = \mathbb{R}\setminus\{x_1,\ldots,x_p\}$ è $p+1$ (supponendo che $x_1 < \ldots < x_p$, si tratta dei sottoinsiemi $(-\infty,x_1),(x_1,x_2),\ldots,(x_{p-1},x_p),(x_p,+\infty)$), e il numero di componenti connesse di X_2 è $q+1$. Visto che per ipotesi $p\neq q$, concludiamo che X_1 e X_2 non possono essere omeomorfi.

Possiamo ora supporre che entrambi n,m siano almeno 2. In questo caso entrambi X_1 e X_2 sono connessi. Consideriamo due esaustioni in compatti di X_1 e X_2, il cui complementare avrà un numero differente di componenti connesse.

In X_1, consideriamo $N\in\mathbb{N}$ tale che: le palle aperte di centro x_i e raggio $1/N$ siano tutte disgiunte, e contenute completamente nella palla chiusa di centro l'origine e raggio N. Consideriamo per $n\in\mathbb{N}$

$$K_n = \{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x-x_i\| \geq 1/(N+n) \text{ per } i=1,\ldots,p,\ \|x\| \leq N+n\} \subseteq X_1,$$

cioè il complementare, all'interno della palla chiusa di centro l'origine e raggio $N+n$, dell'unione delle palle aperte di centro x_i e raggio $1/(N+n)$. Questo K_n è un chiuso limitato di $\mathbb{R}^n$, dunque è compatto. Inoltre chiaramente $K_n \subseteq (\overset{\circ}{K_{n+1}})$ e $\cup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X_1$, dunque $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una esaustione in compatti di X_1. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione indotta $\pi_0(X_1 \setminus K_{n+1}) \to \pi_0(X_1 \setminus K_n)$ è una bigezione: le componenti connesse per archi di $X_1 \setminus K_n$ (che coincidono con le componenti connesse, essendo gli spazi in questione localmente connessi per archi) sono le palle aperte di centro x_i e raggio $1/(N+n)$, e il complementare della palla chiusa di centro l'origine e raggio $N+n$. In particolare il loro numero è $p+1$. Per l'analoga esaustione in compatti $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ di X_2, il complementare $X_2 \setminus H_n$ ha invece $q+1$ componenti connesse per archi. Visto che per ipotesi $p \neq q$, per quanto visto alla fine della lezione del 26/11/2020, segue che X_1 e X_2 non sono omeomorfi.

19. Sia $f\colon X \to Y$ una funzione continua tra spazi metrici, e denotiamo con d_X (risp. d_Y) la distanza su X (risp. su Y). Abbiamo visto a lezione che, se X è compatto, allora f è uniformemente continua, e diamo qui una nuova dimostrazione di questo fatto. Sia dunque X compatto.

Sia

$$G\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad G(x,y) = d_Y(f(x), f(y))$$

e, per ogni $\varepsilon > 0$, sia

$$A_\varepsilon = G^{-1}([\varepsilon, +\infty)) \subseteq X \times X\ .$$

(1) Si mostri che G è continua.
(2) Si mostri che, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme A_ε è compatto.
(3) Si dimostri che, se $\varepsilon > 0$, la mappa $X \times X \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto d_X(x,y)$ assume un minimo strettamente positivo su A_ε, e si deduca che f è uniformemente continua.

Soluzione.

(1) Ricordiamo che la funzione $d\colon (X\times X)\times(X\times X) \to \mathbb{R}$ data da $d((x,y),(x',y')) = d_X(x,x') + d_X(y,y')$ è una distanza, che induce la topologia prodotto su $X\times X$. Mostriamo, usando questa distanza su $X \times X$, che la funzione G è continua. Infatti, per $(x,y),(x',y') \in X\times X$, abbiamo

$$\begin{aligned}
|G(x,y) - G(x',y')| &= |d_Y(f(x),f(y)) - d_Y(f(x'),f(y'))| \\
&= |d_Y(f(x),f(y)) - d_Y(f(x),f(y')) + d_Y(f(x),f(y')) - d_Y(f(x'),f(y'))| \\
&\le |d_Y(f(x),f(y)) - d_Y(f(x),f(y'))| + |d_Y(f(x),f(y')) - d_Y(f(x'),f(y'))| \\
&\le d_Y(f(y),f(y')) + d_Y(f(x),f(x')),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $|A+B| \le |A| + |B|$ per $A, B \in \mathbb{R}$, e la disugaglianza $|d(x,z) - d(x,y)| \le d(y,z)$, che vale in uno spazio metrico generico, ed è conseguenza immediata della disuguaglianza triangolare.

Fissiamo ora $(x',y') = (x_0,y_0) \in X \times X$ e $\varepsilon > 0$. Per continuità di f, esiste $\delta > 0$ tale che valgano entrambe $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\varepsilon/2)$ e $f(B(y_0,\delta)) \subseteq B(f(y_0),\varepsilon/2)$. Se ora $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$, da $d((x_0,y_0),(x,y)) \ge d_X(x_0,x)$, segue che $x \in B(x_0,\delta)$, e analogamente $y \in B(y_0,\delta)$. Quindi abbiamo $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon/2$ e $d_Y(f(y),f(y_0)) < \varepsilon/2$, da cui, usando la disuguaglianza trovata in precendeza, deduciamo $|G(x,y)-G(x_0,y_0)|<\varepsilon$. Questo mostra che G è continua.

(2) Visto che G è continua per il punto (1) e $[\varepsilon,+\infty)$ è chiuso in $\mathbb{R}$, abbiamo che $A_\varepsilon = G^{-1}([\varepsilon,+\infty))$ è chiuso in $X\times X$. Visto che $X\times X$ è compatto, in quanto prodotto di compatti, segue che A_ε è compatto.

(3) La funzione $F\colon X\times X\to\mathbb{R}$ data da $F(x,y)=d_X(x,y)$ è continua, per un ragionamento del tutto analogo a quello usato nel punto (1): se $(x,y),(x',y')\in X\times X$ abbiamo

$$\begin{aligned}|F(x,y)-F(x',y')| &= |d_X(x,y)-d_X(x',y')|\\ &= |d_X(x,y)-d_X(x,y')+d_X(x,y')-d_X(x',y')|\\ &\le |d_X(x,y)-d_X(x,y'))|+|d_X(x,y')-d_X(x',y')|\\ &\le d_X(y,y')+d_X(x,x))=d((x,y),(x',y')).\end{aligned}$$

Essendo $A_\varepsilon\subseteq X\times X$ compatto per il punto (2), concludiamo che la restrizione di F a A_ε ha minimo. Inoltre, notiamo che $F(x,y)=0$ implica $x=y$, e i punti della forma (x,x) non stanno in A_ε qualsiasi sia $\varepsilon>0$, visto che $(x,x)\in A_\varepsilon$ implicherebbe $0=d_Y(f(x),f(x))\ge\varepsilon$, che è assurdo. Segue che il minimo di F su A_ε è strettamente positivo.

Mostriamo ora che f è uniformemente continua. Dato $\varepsilon>0$, vogliamo mostrare che esiste $\delta>0$ tale che $d_X(x,y)<\delta$ implica $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$. In effetti basta prendere come δ il minimo (positivo) della funzione F di cui sopra, sull'insieme A_ε: se $d_X(x,y)<\delta$, allora abbiamo che $(x,y)\notin A_\varepsilon$ (altrimenti δ non sarebbe il minimo assunto da F su A_ε), e quindi segue che $d_Y(f(x),f(y))<\varepsilon$, per costruzione di A_ε.