ANALISI 2

LEZIONE 16

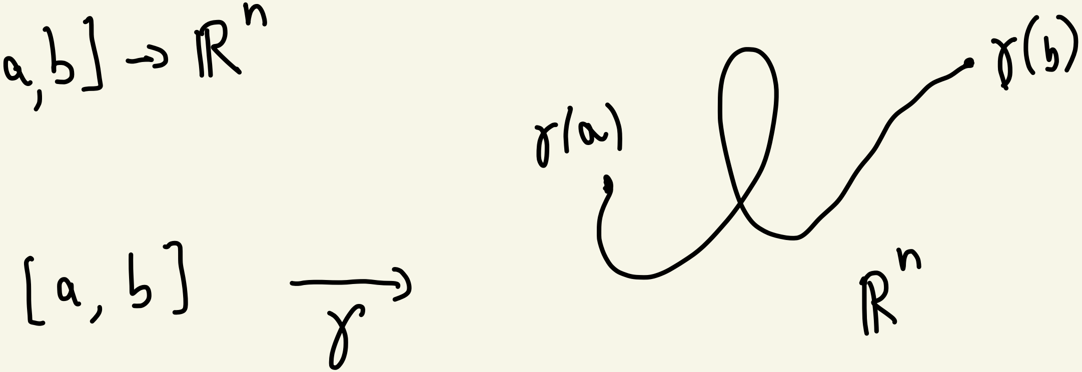
25/2/21

NOVAGA

CURVE

DEF: UNA CURA È UNA FUNZIONE CONTINUA

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$



$\gamma([a,b]) \subseteq \mathbb{R}^n$ È IL SUPPORTO DELLA CURVA γ

DEF: γ È REGOLARE SE $\gamma \in C^1$ E $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t$

γ È REGOLARE A TRATTI SE $\exists\, t_0 = a < t_1 < \ldots t_N = b$ T.C.

$\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ È REGOLARE $\forall i$

NON È DETTO CHE UNA CURVA SIA INIETTIVA

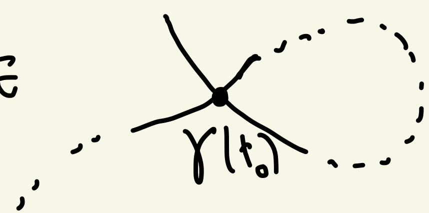
OSS: PER IL TEO FUNZ. IMPLICITE, SE γ È REGOLARE

$\Rightarrow$ LOCALMENTE SI PUÒ SCRIVERE COME GRAFICO DI UNA FUNZIONE C^1, CIOÈ

$$\gamma'(t_0) \neq 0 \Rightarrow \quad \gamma(t) = (t, u(t)) \quad t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

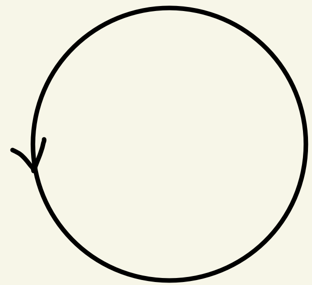
$$\gamma(t) \overset{\sim}{=} (u(t), t) \quad u \in C^1$$

È POSSIBILE



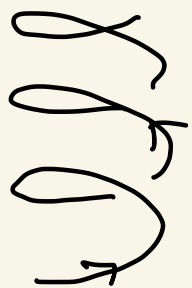
ESEMPI:

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$



CIRCONFERENZA

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \lambda t) \qquad \lambda > 0 \qquad t \in \mathbb{R}$



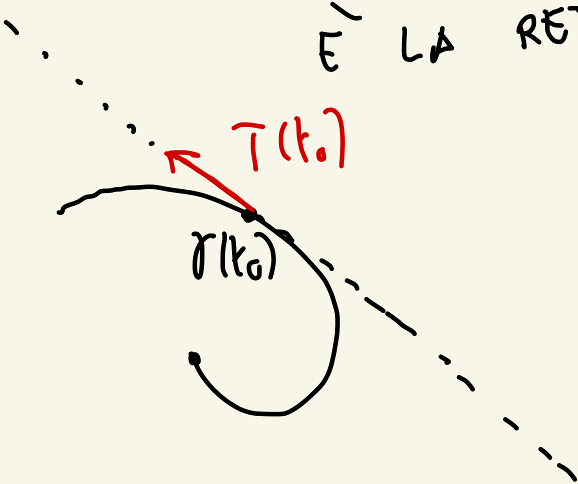
ELICA

VETTORE TANGENTE: γ REGOLARE

$T(t_0) = \dfrac{\gamma'(t_0)}{|\gamma'(t_0)|} \in S^{n-1}$ È IL VETTORE TANGENTE A γ IN $\gamma(t_0)$

E $r(t) = \gamma(t_0) + T(t_0)(t-t_0) \quad t \in \mathbb{R}$

È LA RETTA TANGENTE IN $\gamma(t_0)$

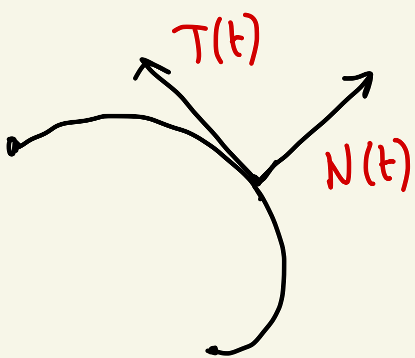


SE $n = 2$ (PIANO)

$N(t)$ = ROTAZIONE DI $T(t)$ DI $\frac{\pi}{2}$ IN SENSO ORARIO

$$N(t) = \left(T_2(t), -T_1(t) \right) \qquad T = (T_1, T_2)$$

È IL VETTORE NORMALE A γ IN $\gamma(t)$



IN DIM. $n > 2$ $\quad T(t)^{\perp}$ È UNO SPAZIO DI DIM. $n-1$

NON C'È UN VETTORE NORMALE CANONICO

SE $\gamma \in C^2$ POSSIAMO CONSIDERARE

$$\vec{K}(t) = \frac{T'(t)}{|\gamma'(t)|} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\left(\frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}\right)' = \Pi_{T(t)^{\perp}} \frac{\gamma''(t)}{|\gamma'(t)|^2}$$

SI DICE VETTORE CURVATURA DI γ IN $\gamma(t)$.

<u>DEF:</u> $\gamma \in C^2$ È BIREGOLARE SE $\gamma'(t) \neq 0$

E $\vec{K}(t) \neq 0 \quad \forall t$

IN TAL CASO SI PUÒ SCRIVERE

$$\vec{K}(t) = k(t)\,N(t)$$

$k(t) > 0$ CURVATURA SCALARE

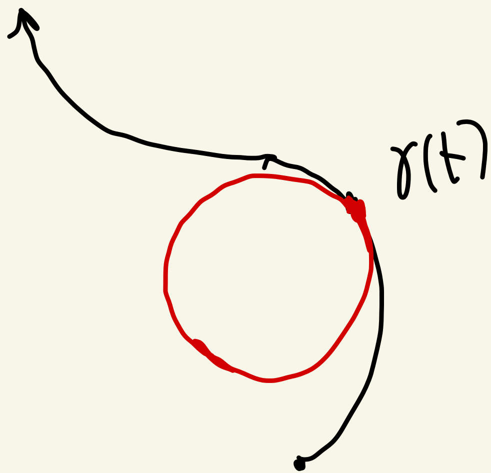
$N(t) \in T(t)^{\perp}$ VETTORE NORMALE

OSS: NON È COERENTE CON LA DEF. DI $N(t)$ IN DIM. $n=2$.

IN DIM. $n=2$ DALLA FORMULA $\vec{K} = K \cdot N$ SEGUE CHE K PUÒ ANCHE ESSERE NEGATIVA

OSS: $K(t) \neq 0 \Rightarrow R(t) = \dfrac{1}{|K(t)|}$ È IL RAGGIO

DEL CERCHIO OSCULATORE DI γ IN $\gamma(t)$

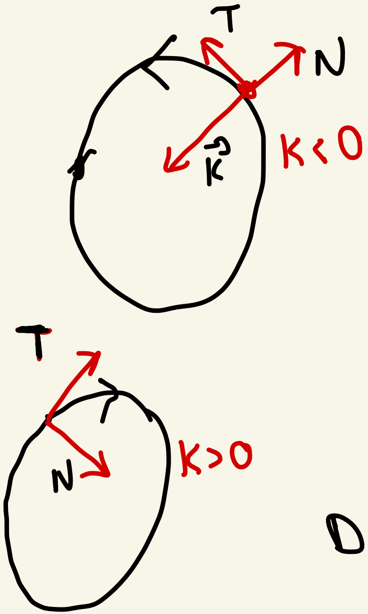


OSS: LA CURVATURA

DI UN CERCHIO DI RAGGIO R

È $K = \dfrac{1}{R}$

ESERCIZIO:



$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ CURVA REGOLARE, CHIUSA $(\gamma(a) = \gamma(b))$, INIETTIVA, DI CLASSE $C^2 \implies$

$$\int_a^b K(t)\,|\gamma'(t)|\,dt = \pm 2\pi$$

DOVE IL SEGNO DIPENDE DALL'ORIENTAZIONE DELLA CURVA

RIPARAMETRIZZAZIONI

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \varphi : [c,d] \to [a,b]$ STRETT. MONOTONA

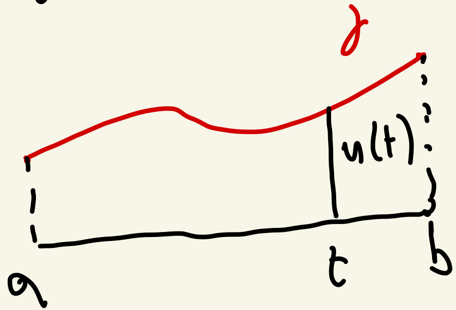
$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ È UNA RIPARAMETRIZZAZIONE DI γ ED HA LO STESSO SUPPORTO

OSS: φ È CRESCENTE $\tilde{\gamma}$ HA LO STESSO VERSO DI PERCORRENZA DI γ

φ È DECRESCENTE HA VERSO OPPOSTO

RAPPRESENTAZIONI SPECIALI:

GRAFICO: $\gamma(t) = (t, u(t))$ $\quad u: [a,b] \to \mathbb{R}^{n-1}$

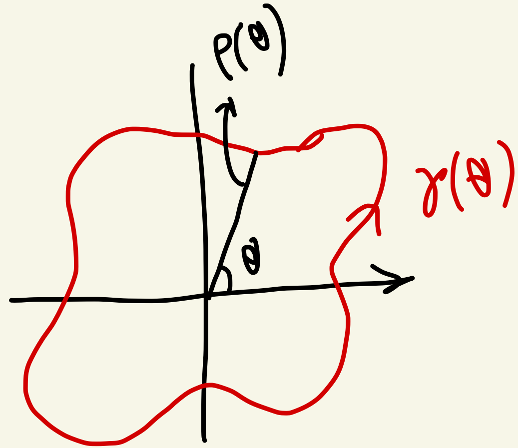


$(n=2)$

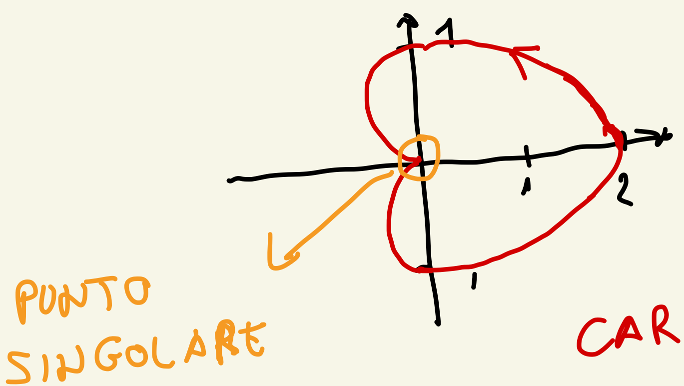
GRAFICO IN COORD. POLARI: $\rho: [0, \underset{\theta}{\underset{\cup}{2\pi}}) \to [a, +\infty)$

$$\gamma(\theta) = \rho(\theta)\, e^{i\theta} = (\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)$$

$\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$



ES: $\rho(\theta) = 1 + \cos(\theta)$



CARDIOIDE

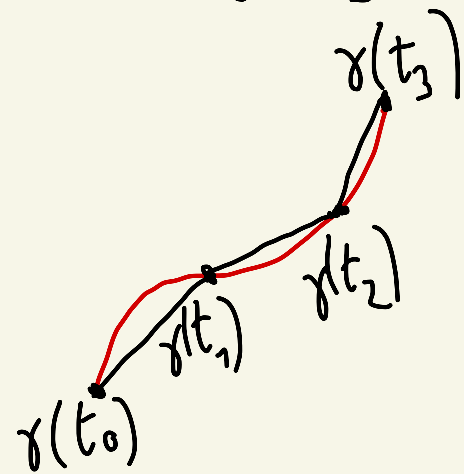
(REG. A TRATTI)

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ CURVA

$P = \{t_0 = a, t_1, \dots, t_N = b\}$ $\quad t_i < t_{i+1}$ PARTIZIONE DI $[a,b]$

$$L(\gamma, P) = \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|$$



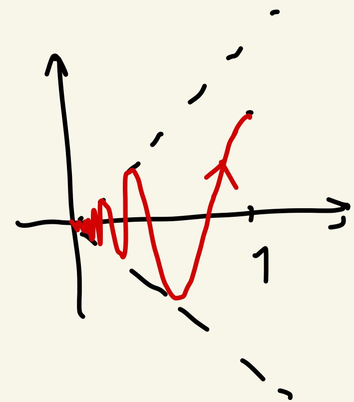
$$L(\gamma) = \sup_P L(\gamma, P) \in [0, +\infty]$$

DEF: γ SI DICE RETTIFICABILE SE $L(\gamma) < +\infty$

ESERCIZIO:

$$\gamma(t) = \left(t,\ t\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\gamma(0) = (0,0)$$



VERIFICARE CHE

$$L(\gamma) = +\infty$$

OSS: ⊙ $L(\gamma)$ NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZ.

MA

⊙ $L(\gamma)$ NON È LA LUNGHEZZA DEL SUPPORTO DI γ (UNA CIRCONFERENZA PERCORSA DUE VOLTE HA LUNGHEZZA DOPPIA)

TEO (RETTIFICABILE NEL CASO C^1)

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ È DI CLASSE C^1

$\Rightarrow$ γ È RETTIFICABILE E $L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt$

VALE LA SEGUENTE ESTENSIONE

TEO (RETTIFICABILITÀ)

γ RETTIFICABILE $\iff \exists$ RIPAR. φ T.C.
$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ È LIPSCHITZIANA E SI HA

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) = \int_a^b |\tilde{\gamma}'(t)|\, dt$$

OSS: UNA FUNZIONE LIPSCHITZIANA È DERIVABILE Q.O. (CON DERIVATA IN L^∞) (TEOREMA DI RADEMACHER)

DIM (CASO C^1)

1. $L(\gamma, P) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \quad \forall P$

$\Rightarrow \quad L(\gamma) \leq \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$

SIA $P = \{t_0, t_1 \dots t_N\}$

$$L(\gamma, P) = \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = \sum_i \left| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(s) \right|$$

$$\leq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)| = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

② $\gamma'(t)$ È UNIF. CONT., CIOÈ FISSATO $\varepsilon>0$

$\exists\,\delta$ T.C. $|t-s|<\delta \Rightarrow |\gamma'(t)-\gamma'(s)|<\varepsilon$.

SIA P UNA PARTIZIONE T.C. $t_{i+1}-t_i<\delta \ \forall i$.

PER OGNI FISSATO $s_i \in [t_i, t_{i+1}]$ SI HA

$$\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t)\,dt = \gamma'(s_i)\left(t_{i+1}-t_i\right) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left(\gamma'(t)-\gamma'(s_i)\right)$$

QUINDI PASSANDO AL MODULO,

$$|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)| = \left|\gamma'(s_i)(t_{i+1}-t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} (\gamma'(t)-\gamma'(s))\,dt\right|$$

$$\geq |\gamma'(s_i)|\,(t_{i+1}-t_i) - \varepsilon\,(t_{i+1}-t_i)$$

DIS. TRIANGOLARE

IN PARTICOLARE $\quad |\gamma'(s)| \leq \dfrac{|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} + \varepsilon$

$\forall s \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\Rightarrow \int_a^b |\gamma'(t)| = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\gamma'(s)|\, ds \leq \sum_i |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + \varepsilon(b-a)$$

$$= L(\gamma, P) + \varepsilon(b-a) \leq L(\gamma) + \varepsilon(b-a)$$

PER L'ARBITRARIETÀ DI ε OTTENGO

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \leq L(\gamma).$$

PARAMETRIZZ. IN LUNGHEZZA D'ARCO

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n \quad C^1$

$s(t) = \int_a^t |\gamma'(s)|\, ds$ LUNGHEZZA DI $\gamma\big|_{[a,t]}$

$s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ CRESCENTE, RIPARAMETRIZZ.

$\tilde{\gamma}(\sigma) = \gamma(s^{-1}(\sigma)) \qquad \sigma \in [0, L(\gamma)]$

SI DICE PARAMETRIZZ. DI γ IN LUNGH. D'ARCO

E SI HA $\tilde{\gamma}'(\sigma) = \tilde{T}(\sigma) = T(s^{-1}(\sigma))$ (VELOCITÀ DI PERCOR. = 1)

OSS: DALLA FORMULA PER IL CAMBIO DI VARIABILE È FACILE VEDERE CHE L'INTEGRALE $\int |\gamma'(t)|$ NON DIPENDE DALLA PARAM. DI γ

(E QUINDI NEPPURE $L(\gamma)$)