LEZIONE 17

LEZIONE 17

26/2/2021

NOVAGA

INTEGRAZIONE LUNGO CURVE

DATA $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ CURVA REGOLARE (A TRATTI)

E UNA FUNZIONE CONTINUA $f : A \to \mathbb{R}$

CON $A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO, $\operatorname{Im}\gamma \subseteq A$, DEFINIAMO

$$\int_\gamma f \underset{DEF}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

OSS: ⊙ $f = 1$ $\quad \int_\gamma f = L(\gamma)$

⊙ $\int_\gamma f$ NON DIP. DALLA PARAMETRIZZ. DI γ (VERIFICA x ESERCIZIO)

CIOÈ $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ $\quad \varphi : [c,d] \to [a,b]$ RIPARAM. C^1 (A TRATTI)

$$\Rightarrow \int_{\tilde{\gamma}} f = \int_\gamma f$$

DATA $v: A \to \mathbb{R}^n$ FUNZIONE CONTINUA,

$v = (v_1, \dots v_n)$ SI DICE ANCHE CAMPO DI VETTORI SU A,

DEFINIAMO L'INTEGRALE DI v SU γ COME

$$\int_\gamma v = \int_\gamma v \cdot T \underset{\text{DEF.}}{=} \int_a^b v(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\cancel{|\gamma'(t)|}} \cancel{|\gamma'(t)|}\, dt, \qquad T(t) = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$$

QUESTO SI DICE ANCHE LAVORO DI v LUNGO γ.

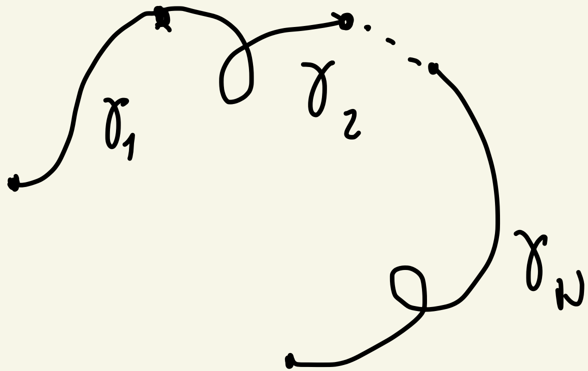
OSS: È INVARIANTE PER RIPARAM. CRESCENTI, CIOÈ

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, φ CRESCENTE $\int_{\tilde{\gamma}} v = \int_\gamma v$

$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$, φ DECRESCENTE $\int_{\tilde{\gamma}} v = -\int_\gamma v$

OSS: $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \gamma_N \Rightarrow \int_\gamma f = \sum_i \int_{\gamma_i} f$

$$\int_\gamma v = \sum_i \int_{\gamma_i} v$$



1-FORME DIFFERENZIALI

$L \in (\mathbb{R}^n)^*$ È UN COVETTORE SE $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ LINEARE E CONT.

$\Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{R}^n$ T.C. $L(x) = v \cdot x = \sum_i v_i \cdot x_i$

CIOÈ $\mathbb{R}^n \simeq (\mathbb{R}^n)^*$ (NON È VERO IN AMBIENTI PIÙ GENERALI, ES: SPAZI DI BANACH)

e_i BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

$e^i = dx_i$ BASE CANONICA DI $(\mathbb{R}^n)^*$

DOVE $e^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ È T.C. $e^i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

$L \in (\mathbb{R}^n)^* \qquad L = \sum_i v_i \, dx_i$

UNA FUNZIONE $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)^*$

$\omega(x) = \sum v_i(x)\, dx_i$ SI DICE 1. FORMA DIFF.

AD ESSA CORRISPONDE IL CAMPO DI VETTORI

$$v(x) = (v_1(x), \dots v_n(x)) \in \mathbb{R}^n.$$

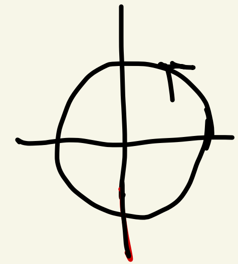
SE ω È CONT. E γ È REGOLARE SI DEFINISCE

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma v = \int_a^b v(\gamma(t))\, \gamma'(t)\, dt$$

ES: $\omega(x,y) = -y\,dx + x\,dy$ 1-FORMA IN $\mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$



(LA PARAM. IN SENSO ANTIORARIO DI UNA CURVA CHIUSA DEF. L'ORIENTAZIONE **POSITIVA** DELLA CURVA)

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \underset{(\mathbb{R}^n)^*}{\underset{\cap}{\omega(\gamma(t))}} \cdot \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{\gamma'(t)}}\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) dt = 2\pi$$

ES: $f: A \to \mathbb{R}$ DI CLASSE C^1

$$df(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$$ DIFFERENZIALE DI f

È UNA 1-FORMA CONTINUA SU A

DEF: LE 1-FORME ω T.C. $\omega = df$

SI DICONO ESATTE E f SI DICE

PRIMITIVA DI ω.

SE v È IL CAMPO DI VETTORI CORR. A ω,

v SI DICE CONSERVATIVO E f POTENZIALE DI v,

$v = \nabla f$.

OSS: $\omega = df$, $f: A \to \mathbb{R}$ C^1,

$\gamma : [a,b] \to A$ CURVA REGOLARE

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[f(\gamma(t))\right] dt$$

$$= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

IN PARTICOLARE SE γ È CHIUSA, CIOÈ $\gamma(a) = \gamma(b)$,

ALLORA $\int_\gamma \omega = 0$

TEO (CARATTERIZZAZIONE FORME ESATTE)

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO CONNESSO

ω 1-FORMA CONT. IN A $\Rightarrow$

LE SEGUENTI AFFERMAZIONI SONO EQUIVALENTI:

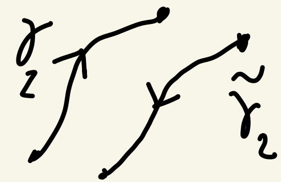
1. ω È ESATTA
2. $\forall \gamma$ CURVA REGOLARE CHIUSA IN A SI HA $\int_\gamma \omega = 0$

3. $\forall \gamma_1, \gamma_2$ CON GLI STESSI ESTREMI E STESSO VERSO $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

DIM: (1) $\Rightarrow$ (2): VISTO NELL'OSS. PRECEDENTE

(2) $\Rightarrow$ (3): γ_1, γ_2 CON STESSI ESTREMI E VERSO

$\tilde{\gamma}_2 = \gamma_2$ PERCORSA COL VERSO OPPOSTO



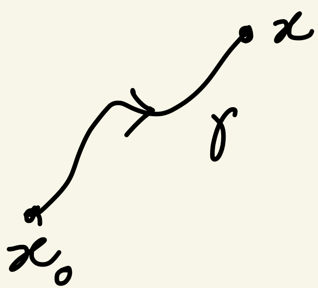
$\Rightarrow \gamma_3 = \gamma_1 \cup \tilde{\gamma}_2$ CURVA CHIUSA, REGOLARE A TRATTI

$$\Rightarrow 0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\tilde{\gamma}_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

③ $\Rightarrow$ ① FISSIANO $x_0 \in A$.

$\forall x \in A$ DEFINIAMO $f(x) = \int_\gamma \omega$, DOVE ⊛

γ È UNA CURVA CON ESTREMI x_0 E x.



OSSERVIAMO CHE $f(x)$

NON DIPENDE DALLA SCELTA

DI γ

⊛ QUI SI USA LA CONNESSIONE DI A

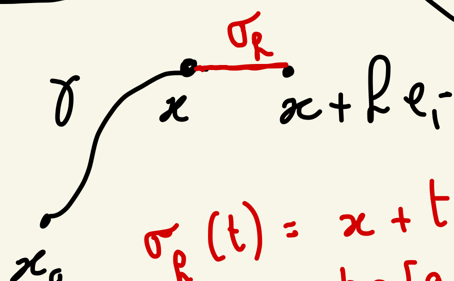
DOBBIAMO VERIFICARE CHE $df = \omega$,

CIOÈ SE $\omega(x) = \sum_i v_i(x)\, dx_i$, SI HA

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = v_i(x) \quad \forall i$. FISSIAMO i E CALCOLIAMO

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+he_i)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\sigma_h}\omega$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_0^h v_i(x+te_i)\,dt = v_i(x).$$



$\sigma_h(t) = x + te_i$, $t\in[0,h]$, $T_{\sigma_h}(x) = e_i$

OSS: LA PRIMITIVA È DEFINITA A MENO DI COST. (CHE DIPENDE DALLA SCELTA DI x_0), INOLTRE $f \in C^1(A)$.

OSS: IL TEOREMA SI APPLICA ANCHE AD APERTI NON CONNESSI, BASTA SCEGLIERE x_0 NELLA STESSA C.C. DI x. IN QUESTO CASO, SE $A = \bigcup_i A_i$ A_i APERTI CONNESSI, $\forall A_i$ TROVO UNA PRIMITIVA $f_i \in C^1(A_i)$.