Note Title 2021-03-02

(eq. Sylvester)

$AX - XB = C \qquad A \in \mathbb{C}^{m\times m} \quad X, C \in \mathbb{C}^{m\times n} \quad B \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$\Updownarrow$

$(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m)\,\mathrm{vec}\,X = \mathrm{vec}\,C \quad \sim \mathcal{O}((mn)^3) \qquad (1)$

Bartels-Stewart 1) $\nabla\square - \square\nabla = \square$ riduco a caso triangolare

2) sostituzione elem. per elemento

Stabile all'indietro in modo <u>non</u> strutturato: vec(X) risolve perturbazione di (1)

$(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m + \underset{\sim}{E})\,\mathrm{vec}\,\tilde{X} = \mathrm{vec}(C) + f$

Numero di condiz. di eq. di Sylvester

$k(\text{equazione}) \leqslant k(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m)$

$$\sigma_{max}(I_n \otimes A - B^T \otimes I_m) = \| I_n \otimes A - B^T \otimes I \| \leq \| I_n \otimes A \| + \| B^T \otimes I_m \|$$

$$= 1 \cdot \|A\| + \|B\| \cdot 1 = \|A\| + \|B\|$$

$\sigma_{min}(I \otimes A - B^T \otimes I) = ??$

$$\lambda_{min}(I \otimes A - B^T \otimes I) = \boxed{\min_{\substack{\lambda \in \Lambda(A) \\ \mu \in \Lambda(B)}} |\lambda - \mu|}$$

$A = Q_A T_A Q_A^* \quad B^T = Q_B T_B Q_B^* \qquad I \otimes A - B^T \otimes I = (Q_B \otimes Q_A)(I \otimes T_A - T_B \otimes I)(Q_B \otimes Q_A)^*$

A, B normali $\Rightarrow I \otimes T_A - T_B \otimes I$ diagonale $\Rightarrow \lambda_{min} = \sigma_{min}$

A, B non normali $\Rightarrow \sigma_{min} \leq \lambda_{min}$

Modo diverso di scrivere

$$\sigma_{min}(I \otimes A - B^T \otimes I) = \min_{x \neq 0} \frac{\|(I \otimes A - B^T \otimes I)\,x\|}{\|x\|} = \min_{X \neq 0} \frac{\|AX - XB\|_F}{\|X\|_F} =: \mathrm{sep}(A, B)$$

$x = \mathrm{vec}(X)$

Osservazione: X risolve eq. Sylvester $\iff$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_m & -X \\ 0 & I_n \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} 1 & X \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \begin{bmatrix} A & -C \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AX-XB-C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$M \text{ generica} \xrightarrow[\text{trasf. ortogonale}]{} \begin{bmatrix} A & -C \\ 0 & B \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{trasf. non ortogonale}]{} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

cond. eq. Sylvester $\iff$ quanto 'difficile' (mal condizionato) fare la seconda trasf.

Caso scalare (tutte 1×1):

$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & \boxed{\mu} \end{bmatrix}$ simile a $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$ (se $\lambda \neq \mu$)

$\begin{bmatrix} \boxed{\lambda} & 1 \\ 0 & \boxed{\lambda} \end{bmatrix}$ non simile a $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ se $\lambda = \mu$

(in questo caso, la similitudine è tramite $\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la sol. di $\lambda x - x\mu = -1$ $\Rightarrow x = \dfrac{-1}{\lambda - \mu}$

$M = QTQ^*$ forma di Schur $\quad T = \begin{bmatrix} t_{11} & * & \cdots & * \\ & t_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & * \\ 0 & & & t_{nn} \end{bmatrix}$

vogliamo "riordinarla", cioè avere un'altra forma di Schur con autoval. in ordine diverso.

Basta saper scambiare due blocchi,

$$\begin{bmatrix} A & -C \\ 0 & B \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} B & * \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

$$AX - XB = C$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-X\\0&1\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}X&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}}\begin{bmatrix}A&-C\\0&B\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&X\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}X&1\\1&0\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B&0\\0&A\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}X&1\\1&0\end{bmatrix}$ scambia A, B ma <u>non</u> è ortogonale

$$\begin{bmatrix}X&1\\1&0\end{bmatrix} = Q\cdot R$$

$$R^{-1}Q^*\begin{bmatrix}A&-C\\0&B\end{bmatrix}QR = \begin{bmatrix}B&0\\0&A\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

triang. con gli stessi autoval. di B

$$Q^*\begin{bmatrix}A&-C\\0&B\end{bmatrix}Q = R\begin{bmatrix}B&0\\0&A\end{bmatrix}R^{-1} = \begin{bmatrix}T_B&\otimes\\0&T_A\end{bmatrix}$$

triang. con stessi autoval. di A

(risolvere $AX-XB=C$ è facile perché A, B già triangolari)

<u>Sottospazi invarianti</u>: $\mathcal{U}$ sottospazio t.c. $M\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}$ $\quad M\in\mathbb{C}^{m\times m}$

$U_1\in\mathbb{C}^{m\times k}$ matrice di base per $\mathcal{U}$

$\rightsquigarrow \quad MU_1 = U_1\cdot A \qquad A\in\mathbb{C}^{k\times k}$

<u>Lemma</u>: se λ, v autocoppia di A (cioè, $Av=\lambda v$), allora

$$M(U_1v) = \lambda(U_1v)$$

$$MU_1v = U_1Av = U_1\lambda v = \lambda(U_1v)$$

Se completo U_1 a una matrice quadrata $[U_1\ U_2]$

$$M\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix}^{-1} M \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{A} & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

parte degli autoval.

Esempi di sott. inv.

1) $\mathrm{span}(v)$, dove v autovett. di M

2) $\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots v_k)$ v_i autovett. $M(\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha_k \lambda_k v_k$

3) $M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ sottosp. inv.: $0, \mathbb{R}^2, \mathrm{span}(e_1)$

4) $M = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \quad 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}$ sottosp. inv.: $\mathrm{span}(e_1, e_2, \dots e_k)$

k a piacere

5) <u>sottosp. inv. stabile</u>: tutti i vettori x_0 tali che $\lim_{k\to\infty} M^k x_0 = 0$

$= \mathrm{span}$(catene di J. associate ad autovalori λ con $|\lambda| < 1$)

Infatti, se $M = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$

$M^k x_0 = \begin{bmatrix} J_1^k x_1 \\ \vdots \\ J_s^k x_s \end{bmatrix}$ $\quad J_i^k x_i \to 0$ se $|\lambda_i| < 1$ oppure $x_i = 0$

$\Rightarrow M^k x_0 \to 0$ sse $x_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \}\text{ blocchi con } |\lambda_i| < 1 \\ \}\text{ blocchi con } |\lambda| \geq 1 \end{matrix}$

Cioè, $x_0 \in \mathrm{span}$(catene di Jordan con autoval. $|\lambda| < 1$)

Sia U_1 base per sottosp. inv. di M; se perturbo M in $M+\delta M$, di quanto cambia U_1?

Possiamo assumere (a meno di cambi di base)

$$U_1 = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} \qquad MU_1 = U_1 A$$

Teo:

$$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}, \quad \delta_M = \begin{bmatrix} \delta_A & \delta_B \\ \delta_C & \delta_D \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= \|\delta_A\|_F \\ b &=: \|\delta_B\|_F \\ d &= \|\delta_D\|_F \end{aligned}$$

Se $\left(4\, sep(A,B) - a - b\right)^2 - d\left(\|C\|_F + c\right) \geq 0$, allora

esiste X (unica) con $\|X\|_F \leq 2 \dfrac{d}{sep(A,B) - a - b}$ tale che

$\begin{bmatrix} I \\ X \end{bmatrix}$ è un sott. inv. di $M + \delta_M$

Dim:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+\delta_A & C+\delta_C \\ \delta_D & B+\delta_B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A+\delta_A & C+\delta_C \\ \delta_D - X(A+\delta_A) & B+\delta_B - X(C+\delta_C) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+\delta_A + (B+\delta_B)X & * \\ \underbrace{\delta_D - X(A+\delta_A) + (B+\delta_B)X - X(C+\delta_C)X}_{\stackrel{?}{=}\, 0 \quad (R)} & * \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 \\ X \end{bmatrix}$ sottosp. inv. di $M+\delta M$ $\iff$

$$(R) \iff X(A+\delta_A) - (B+\delta_B)X = \delta_D - X(C+\delta_C)X$$

$$\underbrace{\left(-I \otimes (B+\delta_B) + (A+\delta_A)^T \otimes I\right)}_{=\, T} \operatorname{vec} X = \operatorname{vec}\left(\delta_D - X(C+\delta_C)X\right)$$

$$\mathrm{vec}(X) = T^{-1}\cdot\mathrm{vec}\big(\delta_D - X(C+\delta_C)X\big) \qquad x = \mathrm{vec}(X)$$

$$x = T^{-1}\,\mathrm{vec}\big(\delta_D - \mathrm{vec}^{-1}(x)(C+\delta_C)\,\mathrm{vec}^{-1}(x)\big)$$

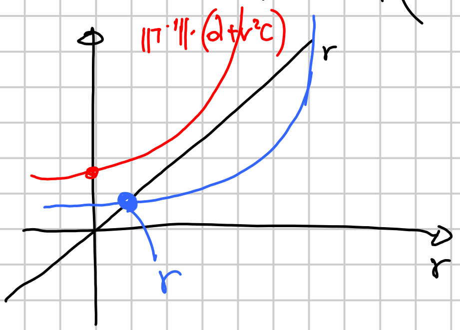
$$x = \varphi(x) \qquad x\in\mathbb{C}^{mn}$$

Tecnica: trovo una palla $B(0,r)$ tale che $\varphi(B(0,r)) \subseteq B(0,r)$

Se questo succede, c'è un punto fisso $x\in B(0,r)$ (Brouwer)

$$\|\varphi(x)\| \leq \|T^{-1}\|\cdot\left(d + \|x\|_F^2\cdot c\right)$$

φ fissa $B(0,r)$ $\Leftarrow$ $\|T^{-1}\|(d+r^2c) = r$



$$\|T^{-1}\| = \frac{1}{\sigma_{min}(T)} = \frac{1}{sep(A+\delta_A, B+\delta_B)} \leq \frac{1}{sep(A,B)-a-b}$$

$$\sigma_{min}\big((A+\delta_A)^T\otimes I - I\otimes(B+\delta_B)\big) = \sigma_{min}\big(A^T\otimes I - I\otimes B + \delta_A^T\otimes I - I\otimes\delta_B\big)$$

$$\geq \underbrace{\sigma_{min}(A^T\otimes I - I\otimes B)}_{\substack{sep(B,A)\\ = \\ sep(A,B)}} - \underbrace{\|\delta_A^T\otimes I\|}_{a} - \underbrace{\|I\otimes\delta_B\|}_{b}$$

$$\sigma_{min}(M+E) \geq \sigma_{min}(M) - \|E\| \qquad \|v\|=1$$

$$\|(M+E)v\| \geq \|Mv\| - \|Ev\|$$

$$\geq \sigma_{min}(M) - \|E\|$$

Quando l'equazione $r = \dfrac{d + (c + \|C\|)\, r^2}{\mathrm{sep}(A,B) - a - b}$ ha sol. reali?

Quando $1 - \dfrac{d\,(c + \|C\|)}{(\mathrm{sep}(A,B) - a - b)^2} \geq 0.$

$$\underbrace{\beta}_{= \frac{1}{\mathrm{sep}(\,)-a-b}} r = \underbrace{\gamma}_{= d} + \underbrace{\alpha}_{= c + \|C\|} r^2$$

$r_1 + r_2 = \beta/\alpha \Rightarrow \min(r_1, r_2) \leq \dfrac{\beta}{2\alpha}$

$\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} = \beta/\gamma \Rightarrow \max\left(\dfrac{1}{r_1}, \dfrac{1}{r_2}\right) \geq \dfrac{\beta}{2\gamma}$

$\Rightarrow \min(r_1, r_2) \leq \dfrac{2\gamma}{\beta}$

$AX - XB = C$

⇝ derivate di f. di matrici

⇝ linearizzazioni / Newton su eq. più complesse.

Prossima lez: def. proprietà di funzioni di matrici

$\exp(A) \qquad \log(A) \qquad \sqrt{A} \qquad \sinh(A)$