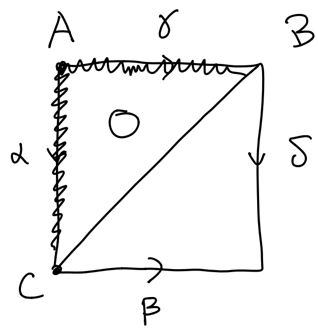
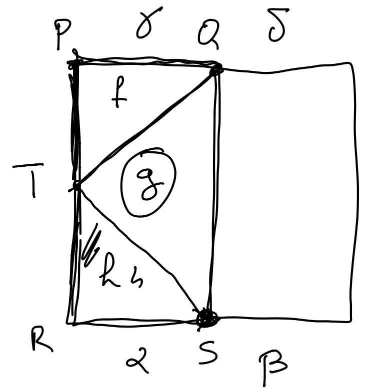
lemma

$H : I \times I \longrightarrow X$



$\alpha * \beta \sim \gamma * \delta$

dim

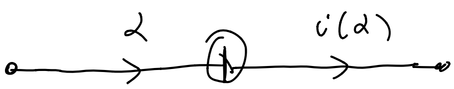


$f(P) = A = f(T) \quad f(Q) = B$

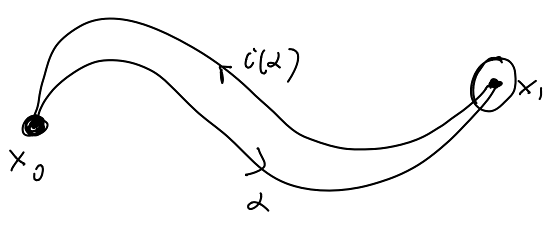
$h(R) = h(T) = A \quad h(S) = C$

$g(Q) = B \quad g(S) = C \quad g(T) = A.$

#



$\alpha * i(\alpha) \sim 1_{x_0}$

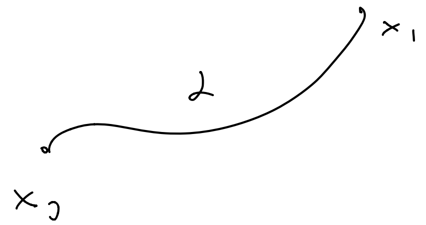


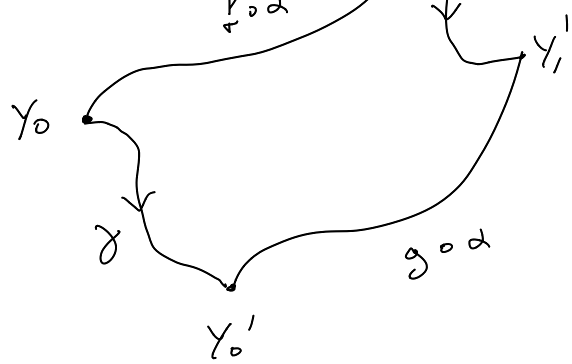
PROPOSIZIONE

$f, g : X \longrightarrow Y \qquad f \sim g \qquad H : I \times X \longrightarrow Y$

$\alpha \in \Omega(X, x_0, x_1) \qquad H_0 = f \qquad H_1 = g$

$\boxed{i(\gamma) * (f \circ \alpha) * \delta \sim g \circ \alpha}$





$$\gamma(t) = H(0,t)$$
$$\delta(t) = H(1,t)$$

PROPOSIZIONE $g : X \longrightarrow X$ $\quad \boxed{g(x_0) = x_1}$

con $g \sim id.$ $\quad x_0 \in X$

$$\pi_1(g) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

Allora $\pi_1(g)$ è un isomorfismo

(non è detto che sia l'identità).

dim. Nella proposizione precedente prendo g e $f = id.$

quindi esistono due cammini $\boxed{\gamma \text{ e } \delta}$

tali che (QUELLI DATI DALL'OMOTOPIA)

$$g \circ \alpha \sim i(\gamma) * (f \circ \alpha) * \delta$$

$$* \quad \boxed{g \circ \alpha \sim i(\gamma) * \alpha * \delta} \quad \forall \alpha.$$

Da questo deduciamo che

$$\pi_1(\gamma): \quad \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1)$$

è un isomorfo con inverso

$$\gamma * \beta * i(\gamma) \longleftarrow \beta$$

#

<u>OSSERVAZIONE</u> In realtà $\gamma \sim \delta$

perché se specializzo la relazione $*$ con $\alpha = 1_{x_0}$

ottengo $\quad 1_{x_1} \sim i(\gamma) * \delta$.

<u>COROLLARIO</u> X e Y connessi per archi

Se X e Y omotopicamente equivalenti allora

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0) \quad \forall x_0 \ \forall y_0.$$

<u>dim</u>

$$f: X \longrightarrow Y \qquad g: Y \longrightarrow X$$

$$g \circ f \sim id_X \qquad f \circ g \sim id_Y$$

DIMOSTRO CHE

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

È UN ISOMORFISMO.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\boxed{f_*^0}"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[r, "g_*"] & \pi_1(X, g(f(x_0))) \end{tikzcd}$$

$g_* \circ f_*$ è un isomorfismo.

$\Rightarrow$ f_* è iniettiva.

e anche che g_* è suriettiva

similmente

$$\pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*^1} \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$$

ne deduco che f_*^1 è suriettiva e g_* è iniettiva.

voglio concludere che

$$f_*^0 : \pi_1(X, x_0) \hookrightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$
$$\cong \qquad\qquad \cong$$
$$f_*^1 : \pi_1(X, x_1) \twoheadrightarrow \pi_1(Y, f(x_1))$$

$x_1 = g(f(x_0))$

Sia γ un cam. da x_0 in x_1

$$\alpha \longmapsto f \circ \alpha$$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \arrow[d, mapsto] & \pi_1(X, x_0) \arrow[r, "\text{iny.}"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_1(Y, f(x_0)) \arrow[d, "\cong"] & \beta \arrow[d, mapsto] \\
i(\gamma) * \alpha * \gamma & \pi_1(X, x_1) \arrow[r, "\text{surj.}"] & \pi_1(Y, f(x_1)) & i(\delta) * \beta * \delta
\end{tikzcd}$$

$$\beta \longmapsto f \circ \beta$$

$\boxed{\delta = f\circ\sigma.}$ è un cammino tra $f(x_0)$ e $f(x_1)$

$$\underline{i(\delta) * f\circ\alpha} * \delta \simeq f\circ\big(i(\gamma) * \alpha * \gamma\big)$$

il lato di destra è uguale

$$\underline{f_*(i(\gamma)) * f_*(\alpha) * \underline{f_*(\gamma)}}$$

$$i(f\circ\gamma) * \underline{f\circ\alpha} * \underset{\delta}{\underset{\parallel}{f\circ\gamma}}$$

quindi f_*^0 è un isomorfismo. #

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rrr, bend left] & A \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & B \arrow[d, phantom, sloped, "\cong"] & b \arrow[d] \\
c \arrow[u] & C \arrow[r, two heads] & D & d \arrow[lll, bend left]
\end{tikzcd}$$

COROLLARIO

Se X è contraibile allora $\pi_1(X, x_0)$ è banale

$$\pi_1(X, x_0) = \{1\}.$$

dim

X è omotopicamente equivalente a $Y = \{p\}$.

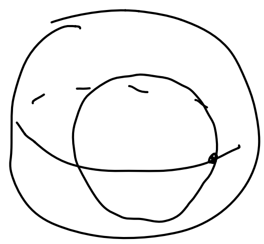
e $\pi_1(Z, p)$ è banale

#.

<u>DEFINIZIONE</u> Se X è uno spazio topologico connesso per archi e $\pi_1(X, x_0)$ è banale allora X si dice <u>semplicemente connesso</u>.

<u>Esempio</u>

S^2



S^2 è semplicemente connesso *

S^2 non è contraibile.

<u>CONFRONTO TRA $\pi_1(X, x_0)$ E $[S^1, X]$</u>

X connesso per archi.

<u>DA $\pi_1(X, x_0)$ IN $[S^1, X]$</u>

$\alpha : I \longrightarrow X \qquad \alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

$\hat{\alpha} : S^1 \longrightarrow X \qquad \hat{\alpha}\left(e^{2\pi i t}\right) = \alpha(t)$

è ben definita perché $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$

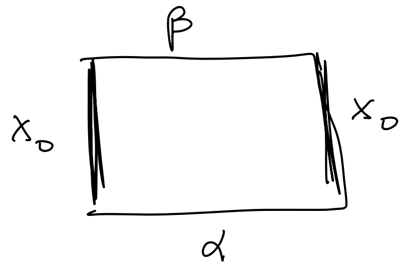
$\Omega(X, x_0, x_0) \longrightarrow$ Mappe da S^1 in X.

$\alpha \longrightarrow \hat{\alpha}$

È ben definito in omotopia

se $\alpha \sim \beta$ come cammini allora $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ come mappe da S^1 in X.

$$H : \underset{s}{I} \times \underset{t}{I} \longrightarrow X$$



$$\hat{H} : \underset{t}{I} \times S^1 \longrightarrow X$$

$$\hat{H}(t, e^{2\pi i s}) = H(s, t)$$

è ben definita perché

$$H(0, t) = H(1, t) = x_0$$

quindi ho definito una mappa da

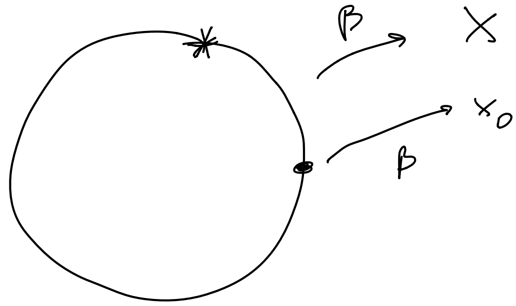
$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow [S^1, X].$$

$$[\alpha] \longrightarrow [\hat{\alpha}]$$

DEFINIZIONE

Se $\beta : S^1 \longrightarrow X$ e $\theta \in [0, 2\pi)$

definisco $\beta_\theta(e^{2\pi i t}) = \beta(e^{2\pi i (t+\theta)})$



OSSERVAZIONE

$$\beta_\theta \sim \beta$$

$$H : I \times S^1 \longrightarrow X$$

$H_0 = \beta$

$H_1 = \beta_\theta$

$$H(t, e^{2\pi i s}) = \beta\left(e^{2\pi i (s + t\theta)}\right)$$

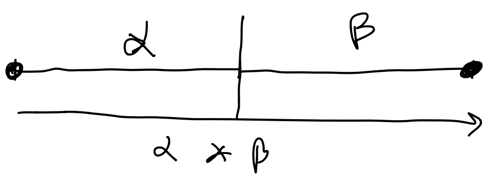
COROLLARIO

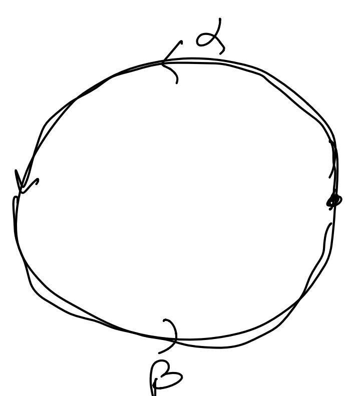
Se $\alpha, \beta \in \Omega(X, x_0, x_0)$

allora $\widehat{\alpha * \beta} \sim \widehat{\beta * \alpha}$

dimostrazione

$$\underline{\widehat{\alpha * \beta}} \sim \underline{(\widehat{\alpha * \beta})_\pi} = \underline{\widehat{\beta * \alpha}}$$





#

OSSERVIAMO CHE SE NOI CONSIDERIAMO

$$\pi_1(X, x_0) \big/ \text{coniugio} = \text{classi coniugio di } \pi_1(X, x_0)$$

α equiv β se $\exists\, \gamma$:

$\alpha = \gamma \beta \gamma^{-1}$ in $\pi_1(X, x_0)$

$$\pi_1(X, x_0) \big/ \text{coniugio} \longrightarrow [S^1, X]$$

la classe di α $\dashrightarrow$ $\hat{\alpha}$

$$\beta = \gamma * \alpha * \gamma^{-1} \qquad \widehat{\gamma * (\alpha * \gamma^{-1})} =$$

$$= \widehat{\alpha * \gamma^{-1} * \gamma} = \hat{\alpha}$$

<u>PROPOSIZIONE</u> LA MAPPA COSTRUITA (X conn per archi)

$$\pi_1(X, x_0) \big/ \text{coniugio} \longrightarrow [S^1, X]$$

è una bigezione.

COSTRUISCO UNA MAPPA $[S^1, X]$ IN ~~$\pi_1(X, x_0)$~~ Coniugio.

$\beta : S^1 \longrightarrow X \qquad S^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

e voglio definire $\alpha : I \longrightarrow X$

$$\alpha(t) = \beta(e^{2\pi i t})$$

questa definizione va quasi bene, l'unico solo problema non è detto che $\alpha(0) = x_0$.

Scelgo a caso un cammino γ da x_0 a $\boxed{\beta(1)}$ $\Uparrow$ S^1

e definisco $\Phi(\beta)$ come la classe coniugata del cammino $\underline{\gamma * \alpha * i(\gamma)}$

PRIMA VERIFICA la classe coniugata di $\gamma * \alpha * i(\gamma)$ NON DIPENDE DA γ.

$$\gamma * \alpha * i(\gamma) = \underline{a}$$

$$\underline{\delta * \alpha * i(\delta) = b}$$

$b \sim \underline{\delta * i(\gamma)} * a * \underline{\gamma * i(\delta)}$ e se $\varepsilon = \underline{\delta * i(\gamma)}$

ε è un cammino da x_0 a x_0

$b \sim \varepsilon * a * i(\varepsilon)$

quindi a meno di omotopia a, b definiscono la stessa classe coniugata.

HO DEFINITO UNA MAPPA DALLE MAPPE DA S^1 IN X in $\pi_1(X, x_0)/\text{coniugio}$.

VERIFICO CHE DEFINISCE UNA MAPPA DA

$$[S^1, X] \text{ in } \pi_1(X, x_0)/\text{coniugio}.$$

$$\beta \sim \beta'$$

$\gamma * \alpha * i(\gamma)$ $\quad$ $\delta * \alpha' * i(\delta)$ SONO NELLA STESSA CLASSE CONIUGATA A MENO DI OMOTOPIA.

dove γ è un cammino tra x_0 e $\beta(1)$

δ " " " " " x_0 e $\beta'(1)$

$$\alpha(t) = \beta(e^{2\pi i t})$$

$$\alpha'(t) = \beta'(e^{2\pi i t})$$

1° CASO $\quad$ SUPPONIAMO CHE $\beta(1) = \beta'(1) = x_0$

in questo caso posso scegliere $\gamma = \delta = 1_{x_0}$

E DIMOSTRO α e α' A MENO DI OMOTOPIA SONO NELLA STESSA CLASSE CONIUGATA

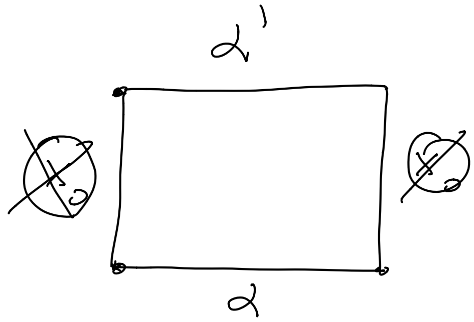
$H: I_t \times S^1 \longrightarrow X \qquad H_0 = \beta \qquad H_1 = \beta'$

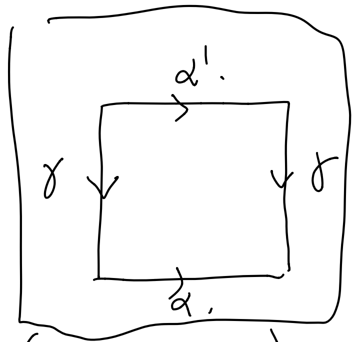
$K: I_s \times I_t \longrightarrow X$ con

$$K(s,t) = H(t, e^{2\pi i s})$$

$K(s,0) = \alpha$

$K(s,1) = \alpha'$





$$K(0,t) = H(t, e^{2\pi i 0}) = H(t,1) = K(1,t).$$

DAL <u>LEMMA</u> RICAVO $\gamma * \alpha \sim \alpha' * \gamma$

ovvero a meno di omotopia

α e α' stanno nella stessa classe coniugata

<u>CASO GENERALE</u> Se $\beta(0) \neq x_0$ o $\beta'(1) \neq x_0$

La presenza di γ e δ aggiunge un ulteriore "coniugio".

#

- π_1
- f_*
- spazi omot. equiv hanno gruppi fond. isomorfi.
- confronto tra π_1 e $[S^1, X]$.

PROPOSIZIONE

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$$

dim

$$\Omega(X \times Y, (x_0, y_0)) = \Omega(X, x_0) \times \Omega(Y, y_0)$$

$\gamma : I \longrightarrow X \times Y$ $\qquad (\alpha, \beta)$

$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t))$

e se H è una omotopia da γ a γ'

$H : I \times I \longrightarrow X \times Y$ $\qquad H_X : I \times I \longrightarrow X$

$H(s,t) = (H_X(s,t), H_Y(s,t))$ $\qquad H_Y : I \times I \longrightarrow Y.$

H è una omotopia tra γ e γ'

se e solo se H_X è una omotopia tra α e α'

e H_Y " " β e β' #