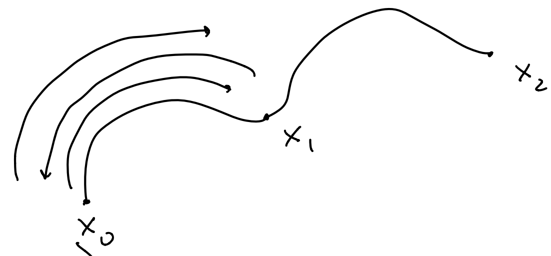
$*$ $\underline{\Omega(X, x_0, x_1)}$ $\sim$

$\boxed{\text{II}}$ $\pi_1(X, x_0) = \Omega(X, x_0, x_0) / \sim$



$\alpha * \beta$

$1_{x_0} * \alpha \sim \alpha$

$\alpha * 1_{x_1} \sim \alpha$

$i(\alpha)$ α^{-1}

$\underline{\forall \alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)}$

$\Downarrow$

$\underline{\alpha * i(\alpha) \sim 1_{x_0}}$

$i(\alpha) * \alpha \sim 1_{x_1}$ $i(i(\alpha)) = \alpha$

LEMMA

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "\alpha"] \arrow[r, bend right, "\beta"'] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

x_0 x_1 y_0 y_1

$\alpha(0) = \beta(0) = x_0$

$\alpha(1) = \beta(1) = x_1$

$f(x_0) = g(x_0) = y_0$

$f(x_1) = g(x_1) = y_1$

$\alpha \sim \beta$ come cammino (omotopia con estremi fissati)

$f \sim g$ in questo senso

$\exists\, H : I \times X \longrightarrow Y$ tale che $H_0 = f$ $H_1 = g$

e $H(t, x_0) = y_0$ $\forall t$ $H(t, x_1) = y_1$ $\forall t$.

Allora $\underline{f \circ \alpha} \sim \underline{g \circ \beta}$ come cammini.

dim

Sia K l'omotopia tra α e β

$L : I \times I \longrightarrow Y$

$L(s, t) = H(t, K(s, t))$

$$L(s,0) = H(0, K(s,t)) = f \circ \alpha(s)$$

$$L(s,1) = g \circ \beta(s)$$

e $$L(0,t) = H(t, (K(0,t)) = y_0 \quad \forall t \qquad (K(0,t) = x_0)$$

$$L(1,t) = y_1 \quad \forall t$$

#

RIPARAMETRIZZAZIONE DI CAMMINI

Sia $J = [a, b]$ e sia $\gamma : J \longrightarrow X$

Sia $\underline{\varphi : I \longrightarrow J}$ con $\boxed{\varphi(0) = a}$ $\boxed{\varphi(1) = b.}$

$$\alpha = \gamma \circ \varphi : I \longrightarrow X$$

A MENO DI OMOTOPIA α NON DIPENDE DA φ.

Se $\varphi, \psi : \underline{I \longrightarrow J}$ come sopra

Allora $\underline{\gamma} \circ \varphi \sim \underline{\gamma} \circ \psi$.

dim RICORDIAMO CHE $\Omega([a,b], a, b) \ni \varphi, \psi$

A MENO DI OMOTOPIA HA UN UNICO EL.

$\varphi \sim \psi$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, bend left, "\varphi"] \arrow[r, bend right, "\psi"'] & J \arrow[r, "\gamma"] & X \end{tikzcd}$$

dal lemma precedente $\gamma \circ \varphi \sim \gamma \circ \psi$

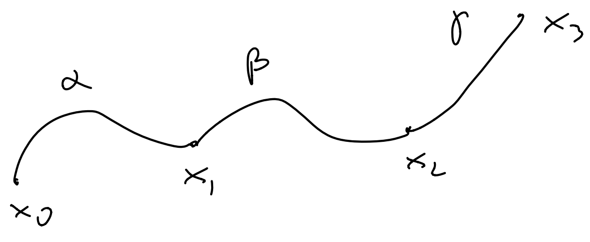
#

COROLLARIO

α cammino da x_0 a x_1

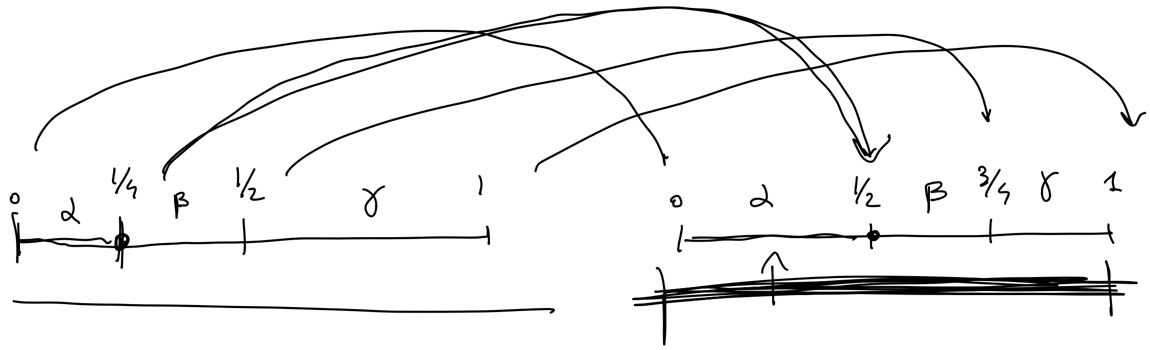
β " " x_1 a x_2

γ " " x_2 a x_3



$$(\alpha * \beta) * \gamma \sim \alpha * (\beta * \gamma)$$

dim



Sia $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ affine a tratti

$$0 \longrightarrow 0$$
$$1/4 \longrightarrow 1/2$$
$$1/2 \longrightarrow 3/4$$
$$1 \longrightarrow 1 .$$

$$(\alpha * (\beta * \gamma)) \circ \varphi = (\alpha * \beta) * \gamma$$

Per il lemma precedente $\alpha * (\beta * \gamma) \sim (\alpha * \beta) * \gamma$ #

COROLLARIO

$\pi_1(X, x_0)$ con l'operazione di concatenazione

è un gruppo.

dim $\quad 1_{x_0}$

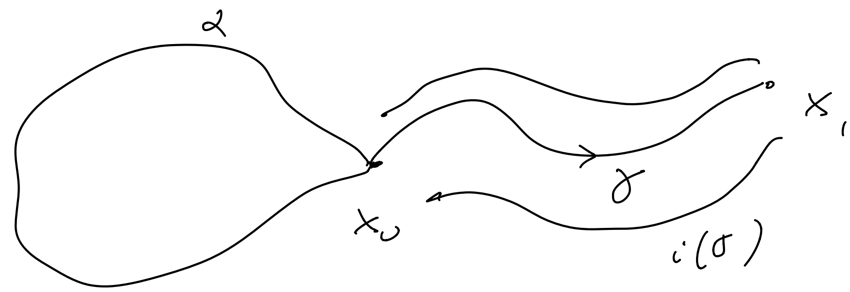
$i(\alpha)$

e il prodotto è associativo #

PROPOSIZIONE

Siano x_0, x_1 nella stessa componente connessa per archi di X. e sia γ un cammino da x_0 a x_1

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(X, x_1) \\ \alpha & \longrightarrow & i(\gamma) * \alpha * \gamma \\ \gamma * \beta * i(\gamma) & \longleftarrow & \beta \end{array}$$



queste due mappe sono isomorfismi di gruppi.

dim

1) SONO BEN DEFINITE

2) SONO UNA L'INVERSA DELL'ALTRA

$$\alpha \longrightarrow i(\gamma) * \alpha * \gamma \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \underbrace{\gamma * i(\gamma)} * \alpha * \gamma * i(\gamma)$$
$$\sim 1_{x_0} * \alpha * 1_{x_0} \sim \alpha .$$

ANALOGAMENTE SE PARTO DA $\pi_1(X, x_1)$

3) SONO MORFISMI DI GRUPPI

$$\underline{i(\gamma) * (\alpha_1 * \alpha_2) * \gamma} \sim$$
$$\sim i(\gamma) * \alpha_1 * \underline{1_{x_0}} * \alpha_2 * \gamma$$
$$\sim \underline{(i(\gamma) * \alpha_1 * \gamma)} * \underline{(i(\gamma) * \alpha_2 * \gamma)}$$

ANALOGAMENTE LA MAPPA DA $\pi_1(X, x_1)$

in $\Pi_1(X, x_0)$ È DI GRUPPI

#

PER OGNI X e $x_0 \in X$ ABBIAMO COSTRUITO $\Pi_1(X, x_0)$

VOGLIO COSTRUIRE $\forall\ f : X \longrightarrow Y$ con $f(x_0) = y_0$

$$f_* = \pi_1(f) = \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow \Pi_1(Y, y_0)$$

<u>DEFINIZIONE</u> Se $x_0, x_1 \in X$ e $y_0 = f(x_0)$ e $y_1 = f(x_1)$

$$f_* : \Omega(X, x_0, x_1) \longrightarrow \Omega(Y, y_0, y_1)$$

$$f_*(\alpha) = f \circ \alpha$$

Per il lemma $I \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$ se $\alpha \sim \beta$ allora

$f_*(\alpha) \sim f_*(\beta)$ in particolare definisce una mappa da $\Pi_1(X, x_0)$ in $\Pi_1(Y, y_0)$

che indico sempre con f_* o $\Pi_1(f)$.

<u>OSSERVAZIONE</u>

1) $i(f_*(\alpha)) = \underline{f_*(i(\alpha))}$ a livello di cammini

2) $f_*(\alpha * \beta) = f_*(\alpha) * f_*(\beta)$ "

<u>dim</u>

1) $i(f_*(\alpha))(t) = f_*(\alpha)(1-t)$

$= f(\alpha(1-t))$

$$f_*(i(\alpha))(t) = f(i(\alpha)(t)) = f(\alpha(1-t))$$

\#

2) ANALOGO \#

COROLLARIO

La mappa $f_* = \pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ è un morfismo di gruppi

\#

OSSERVAZIONE

$f : X \longrightarrow Y \qquad g : Y \longrightarrow Z$

3) $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$

a livello di cammini

$$g_*(f_*(\alpha)) = (g \circ f)_*(\alpha)$$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ g \circ f \circ \alpha & & g \circ f \circ \alpha \end{array}$$

4) $id_* = id$

OSSERVAZIONE

$f, g : X \longrightarrow Y$

$f(x_0) = y_0 = g(x_0)$

$f(x_1) = y_1 = g(x_1)$

$\underline{f_*, g_*} : \Omega(X, x_0, x_1) \longrightarrow \Omega(Y, y_0, y_1)$

Se f e g sono omotope in senso forte.

cioè $\exists$ $H : I \times X \longrightarrow Y$

con $H_0 = f$ $\quad H_1 = g$

e $H(x_0, t) = y_0$ $\forall t$ $\quad H(x_1, t) = y_1$ $\forall t$

Allora $f_*(\alpha) \sim g_*(\alpha)$

$\forall \alpha \in \Omega(X, x_0, x_1)$

IN PARTICOLARE SE $x_0 = \cancel{x_1}$

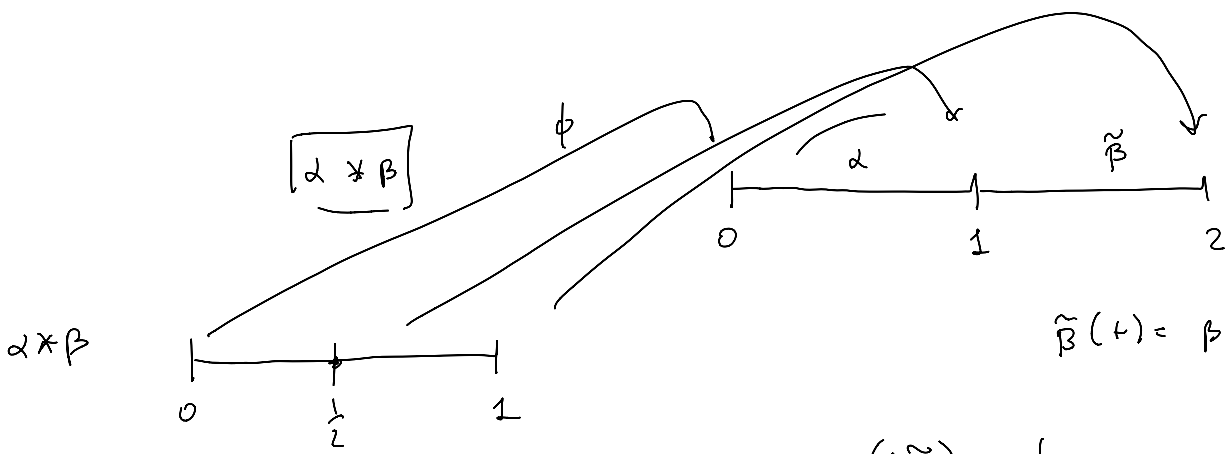
$\pi_1(f) = \pi_1(g)$.

<u>dim</u>

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

per il lemma fatto a inizio lezione fondamentale

#



$\tilde\beta(t) = \beta(t-1)$

$\alpha * \beta = (\alpha, \tilde\beta) \circ \phi$

α

$$\alpha * \beta\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \end{cases}$$

0 $\quad$ 1/2

$\{ \; \alpha(2t) \qquad t \le 1/2$

$$(\alpha * \beta) * \gamma\,(t) = \begin{cases} \beta(4t-1) & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \end{cases}$$

$$\alpha * (\beta * \gamma)\,(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \frac{1}{2} \le t \\ \end{cases}$$

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

$$\big((\alpha * \beta) * \gamma\big) \circ \varphi = \alpha * (\beta * \gamma)$$

f_* e di $\pi_1(f)$

OSSERVAZIONE

$i : X \hookrightarrow Y \qquad X \subset Y.$

e sia $r : Y \longrightarrow X$ una retrazione.

$x_0 \in X \qquad i(x_0) = x_0$

$\pi_1(i) : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$

$\pi_1(r) : \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, y_0)$

$r \circ i = \mathrm{id}_X$

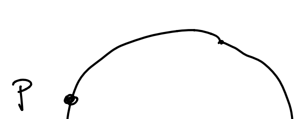
$$\pi_1(r) \circ \pi_1(i) = \pi_1(r \circ i) = \pi_1(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_1(X, x_0)}$$

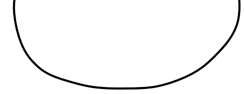
IN PARTICOLARE $\pi_1(i)$ è iniettiva

$\pi_1(r)$ è surgettiva

IN GENERALE NON SONO ISOMORFISMI.

$X = \{p\}$ $\qquad Y = S^1$





$\pi_1(P) = 1$ $\qquad\qquad$ $\pi_1(Y)$ non è banale.

OSSERVAZIONE

$X \xrightarrow{i} Y$ $\qquad$ $r : Y \to X$ una retrazione

e supponiamo che X sia un retratto per deformazione (in senso forte) di Y.

Allora
- $\pi_1(r) \circ \pi_1(i) = id_{\pi_1(X, x_0)}$
- $\pi_1(i) \circ \pi_1(r) = id_{\pi_1(Y, y_0)}$

dim

$$\pi_1(i) \circ \pi_1(r) = \pi_1(i \circ r) = \pi_1(R)$$

$R = i \circ r : Y \to Y$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, bend right, "Id"'] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & Y \end{tikzcd}$$

l'omotopia lascia fissi i punti di X e in particolare lascia fisso x_0.

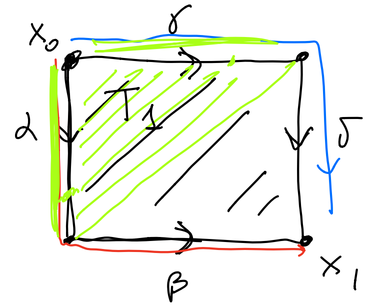
quindi $\pi_1(R) = \pi_1(Id) = Id_{\pi_1(Y, y_0)}$

#.

$$\boxed{\pi_1(f) = \pi_1(g)}$$

VOGLIAMO STUDIARE $\pi_1(f)$ e $\pi_1(g)$ nel caso di mappe $f, g : X \to Y$ omotope (ma non nel senso forte studiato in precedenza).

LEMMA Sia $H : I \times I \longrightarrow X$



$\alpha(t) = H(0, 1-t)$ $\quad H(0,1) = x_0$

$\beta(t) = H(t, 0)$

$\gamma(t) = H(t, 1)$

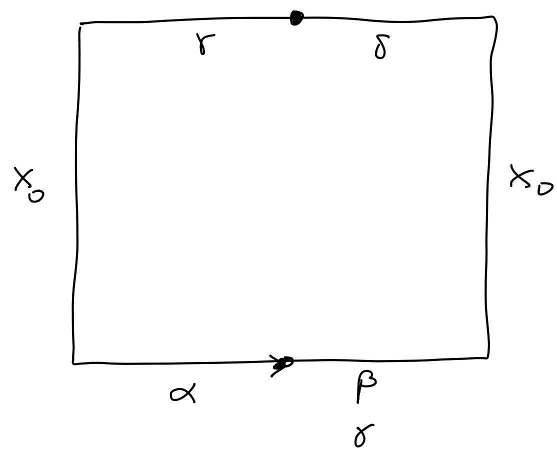
$\delta(t) = H(1, 1-t)$ $\quad H(1,0) = x_1$

$$\underline{\alpha * \beta} \sim \underline{\gamma * \delta}$$

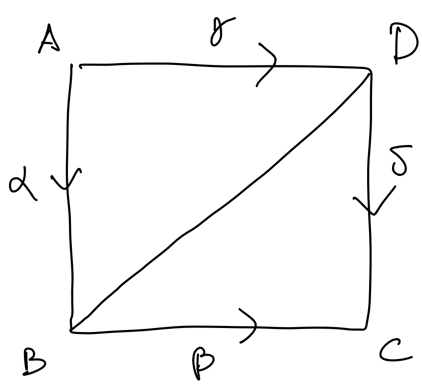
dim (L'OMOTOPIA SCRITTA A LEZIONE NON ERA BEN DEFINITA)

Voglio costruire una omotopia $K : I \times I \longrightarrow X$

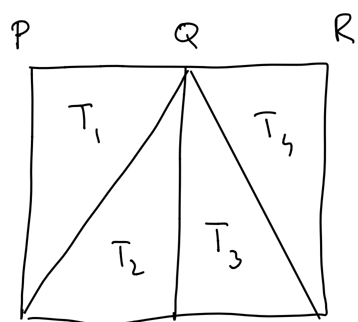
con le caratteristiche riassunte in figura



Mentre le caratteristiche di H sono riassunte nella figura



Per definire K divido il quadrato in 4 triangoli come in figura e definisco l'omotopia pezzo per pezzo:



S T U

$f_1 : T_1 \longrightarrow I^2$ le mappe affini con $f_1(P) = f_1(S) = A \quad f_1(Q) = D$

$f_2 : T_2 \longrightarrow I^2$ " " " " $f_2(S) = A \quad f_2(Q) = D \quad f_2(T) = B$

$f_3 : T_3 \longrightarrow I^2$ " " " " $f_3(Q) = D \quad f_3(T) = B \quad f_3(U) = C$

$f_4 : T_4 \longrightarrow I^2$ " " " " $f_4(Q) = D \quad f_4(R) = f_4(U) = C$

$f_1, \dots f_4$ si incollano e definiscono $f : I^2 \longrightarrow I^2$

e pongo $K = H \circ f$.

K ha tutte le proprietà richieste.

Per esempio sul lato PU ovvero per $s = 0$ f_1

è costante e uguale a A

$K(0, t) = H(A)$

Le altre verifiche sono simili

#

PROPOSIZIONE

Siano $x_0, x_1 \in X$ e $f, g : X \longrightarrow Y$ $f \sim g$

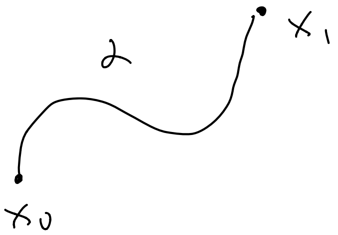
e sia $H : I \times X \longrightarrow Y$ l'omotopia tra f e g

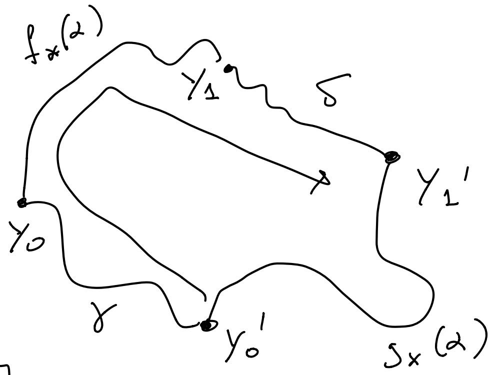
$\underline{H_0 = f}$ $\underline{H_1 = g}$ se $\gamma(t) = H(t, x_0)$

$\delta(t) = H(t, x_1)$

$\gamma(0) = f(x_0) = y_0 \qquad \delta(0) = f(x_1) = y_1$

$\gamma(1) = g(x_0) = y_0' \qquad \delta(1) = g(x_1) = y_1'$

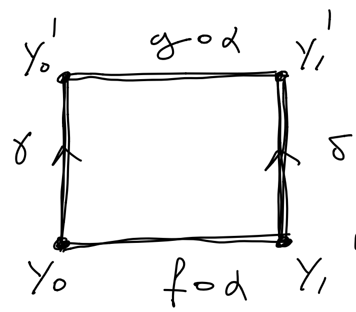




$$\boxed{g\circ\alpha \sim i(\gamma) * (f\circ\alpha) * \delta}$$

<u>dim</u>

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & X \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "2"] & Y \end{tikzcd}$$



$f\circ\alpha \sim g\circ\alpha$

(in senso debole: senza estremi fissati).

$\tilde{H}(s,t) = \underline{\underline{H}}(t;\alpha(s))$.

$\tilde{H}$ ha le proprietà riassunte da questa figura

il lemma precedente mi dice che

$$\boxed{i(\gamma)*(f\circ\alpha) \sim (g\circ\alpha)*i(\delta)}$$

da cui

$$\boxed{i(\gamma)*(f\circ\alpha)*\delta} \sim (g\circ\alpha)*\underline{i(\delta)*\delta} \sim g\circ\alpha$$

#