Corso di Laurea in Matematica
Geometria 2 - Foglio di esercizi secondo semestre

Questo file verrà aggiornato più o meno alla fine di ogni settimana.

Esercizi I settimana

Esercizio 1. Siano X, Y spazi metrici dotati rispettivamente delle distanze d_X, d_Y (e delle topologie indotte). Sia

$$d\colon (X \sqcup Y) \times (X \sqcup Y) \to \mathbb{R}$$

definita da

$$d(p,q) = \begin{cases} \min\{d_X(p,q), 1\} & \text{se } p, q \in X \\ \min\{d_Y(p,q), 1\} & \text{se } p, q \in Y \\ 1 & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Si mostri che d è una distanza, e che la topologia indotta da d su $X \sqcup Y$ coincide con la topologia unione disgiunta.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi topologici, e sia X contraibile.

(1) Si mostri che $[Y, X]$ consiste di un solo elemento (cioè esiste una sola classe di omotopia di mappe da Y in X).
(2) Si mostri che esiste una bigezione tra $[X, Y]$ e $\pi_0(Y)$ (in particolare, se Y è connesso per archi, allora anche $[X, Y]$ consiste di un solo elemento).

Esercizio 3. Sia X uno spazio connesso, e sia Y uno spazio omotopicamente equivalente ad X. Si mostri che Y è connesso.

Esercizio 4. Sia

$$X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \times \mathbb{R} \right) .$$

(1) Si mostri che X è contraibile.
(2) Sia $x_0 = (0, 1) \in X$. Si mostri che x_0 non è un retratto di deformazione di X.

Esercizi II settimana

I primi quattro esercizi sono relativi alle definizioni date questa settimana. Credo sia importante provare a farli per acquisire un minimo di familiarità con questi concetti prima delle prossime lezioni.

L'ultimo esercizio è il completamento dell'esercizio 4 fatto la volta scorsa.

Esercizio 5. Si consideri (solo per questo esercizio) la relazione di omotopia tra cammini senza punto iniziale e punto finale fissati. Si dimostri che tutti i cammini in $\Omega(X, x_0, x_1)$ sono omotopi tra loro.

Esercizio 6. Sia α un cammino da x_0 a x_1. Si dimostri che $1_{x_0} * \alpha \sim \alpha * 1_{x_1} \sim \alpha$.

Esercizio 7. Dimostrare che un cammino α che inizia e termina in x_0 è omotopo al cammino costante se e solo se $\hat{\alpha}$ si estende a tutto D^2.

Esercizio 8. Completare la dimostrazione che se X è connesso per archi allora la mappa da $[S^1, X]$ alle classi coniugate di $\pi_1(X, x_0)$ definita a lezione è ben definita e verificare che è l'inversa della mappa che manda la classe coniugata del cammino α a meno di omotopia nella mappa $\hat{\alpha}$ a meno di omotopia.

Esercizio 9. Si dia un esempio di uno spazio topologico X che sia contraibile ma tale che nessun punto sia retratto per deformazione di X. [Unire degli spazi simili a quelli dell'esercizio 4]

Esercizi III settimana

Esercizio 10. Si consideri la mappa

$$p\colon S^1 \to S^1 , \qquad p(z) = z^5 .$$

Si determini un'azione libera e propriamente discontinua di un gruppo G su S^1 tale che $p(z) = p(z')$ se e solo se $z = g \cdot z'$ per qualche $g \in G$, e se ne deduca che p è un rivestimento di grado 5.

Esercizio 11. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento. Abbiamo visto a lezione che p è una mappa aperta.

(1) Si mostri che, se p ha grado finito, allora è una mappa chiusa.
(2) Si mostri che il rivestimento $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$ non è una mappa chiusa.

Esercizio 12. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento.

(1) Si mostri che, se X è di Hausdorff, allora anche E è di Hausdorff.
(2) Si mostri che, se X è compatto e p ha grado finito, allora anche E è compatto.

Esercizio 13. Sia $p\colon E \to X$ un rivestimento, sia X connesso per archi, e siano $x_0 \in X$ e $F = p^{-1}(x_0)$. Si supponga che l'azione di monodromia sia transitiva. Si mostri che E è connesso per archi.

Esercizio 14. Sia $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, e si consideri l'azione di $\mathbb{Z}$ su E definita da $n \cdot (x, y) = (2^n x, 2^{-n} y)$. Sia $p\colon E \to E/\mathbb{Z}$ la proiezione al quoziente relativa a questa azione.

(1) Si mostri che p è un rivestimento.
(2) Si mostri che $E/\mathbb{Z}$ non è di Hausdorff (mentre E ovviamente lo è). (Suggerimento: si studino gli intorni di $p(1, 0)$ e di $p(0, 1)$).

Esercizi IV settimana

Esercizio 15. Si formuli una versione del teorema del punto fisso di Brouwer, del teorema di Borsuk-Ulam e dei due lemmi che abbiamo utilizzato per dimostrarli, in dimensione 1.

Esercizio 16. Siano A e B due aperti limitati di $\mathbb{R}^3$ e sia P un punto di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che esiste un piano passante per P che divide sia A che B in due insiemi dello stesso volume. [Osservare che i semispazi passanti per P si possono parametrizzare con S^2. Procedere per assurdo riducendosi al lemma che abbiamo utilizzato per dimostrare il teorema di Borsuk-Ulam]

Esercizio 17.

(1) Si calcoli il gruppo fondamentale del piano proiettivo reale. [Rivestimenti]
(2) Si calcoli il gruppo fondamentale del piano proiettivo complesso. [Van Kampen]

Esercizio 18. A scanso di equivoci cerchio=circonferenza.

(1) Calcolare il gruppo fondamentale dell'unione di due cerchi del piano che siano tangenti.[Van Kampen]
(2) Calcolare il gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \smallsetminus C$ con C un cerchio. [Van Kampen: in questo caso gli aperti vanno scelti con più cura del caso precedente. Sono possibili tantissime scelte. Provo a suggerirne una senza aiutare troppo. Una scelta naturale potrebbe essere prendere tutto lo spazio meno il disco bordato dal cerchio e un cilindro pieno che passa dentro il cerchio. Questa scelta pero' non funziona: come mai? Provate a porre un rimedio al problema che si crea con questi due aperti: un modo elegante di farlo e' curvando un po' il cilindro...]

Esercizio 19. Sia X una varietà topologica di dimensione 3, sia $x \in X$ e sia $Y = X \smallsetminus \{x\}$. Sia y_0 un punto di Y.

a) Dimostrare che X è connesso se e solo se Y è connesso.
b) Dimostrare che l'inclusione di Y in X induce un isomorfismo tra $\pi_1(Y, y_0)$ e $\pi_1(X, y_0)$.

Cosa si può dire in dimensione 2?

Esercizio 20. Dimostrare che il gruppo libero generato da due elementi è isomorfo a $\mathbb{Z} \star \mathbb{Z}$ [Ricordo che se X è un insieme, L è un gruppo e $\alpha : X \longrightarrow L$ è una funzione allora L si dice il gruppo libero generato da X se per ogni gruppo M e per ogni $\varphi : X \longrightarrow M$ esiste una unica mappa $\Phi : L \longrightarrow M$ di gruppi tale che $\Phi \circ \alpha = \varphi$.]

Esercizi V settimana

Esercizio 21. Sia M il nastro di Moebius, e sia ∂M il suo bordo. (Per formalizzare tali concetti, possiamo porre $M = Q/\sim$, dove $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ e $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica $(t,0)$ con $(1-t,1)$ per ogni $t \in [0,1]$, e definire il bordo di M come l'immagine in M di $\{0,1\} \times [0,1]$).

(1) Sia $x_0 \in \partial M \subseteq M$, e si mostri che $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(\partial M, x_0) \cong \mathbb{Z}$.
(2) Se $i\colon \partial M \to M$ è l'inclusione, si descriva la mappa $\pi_1(i)\colon \pi_1(\partial M, x_0) \to \pi_1(M, x_0)$.
(3) Si mostri che M non si retrae su ∂M.

Esercizio 22. Sia D^2 il disco unitario chiuso e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, sia $f_n\colon \partial D^2 \to S^1$ la funzione $f_n(z) = z^n$ (come sempre, identifichiamo $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$). Sia infine

$$X_n = \left(D^2 \sqcup S^1\right)/_\sim \ ,$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza generata da $x \sim y$ se $x \in \partial D^2$, $y \in S^1$ e $f_n(x) = y$.

(1) Per $n = 2$, lo spazio X_n è uno spazio topologico "noto". Sapreste riconoscerlo?
(2) Si calcoli $\pi_1(X_n, x_0)$, dove x_0 è un qualsiasi punto base di X_n.

Esercizio 23. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $X_n \subseteq \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro $(2^{-n}, 0)$ e raggio 2^{-n}, e sia $X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} X_n$, dotato della topologia di sottospazio ereditata dal piano. Si mostri che X non è semilocalmente semplicemente connesso.

Esercizio 24. Abbiamo visto a lezione che, se K è una circonferenza che giace su un piano, allora $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$. Le cose cambiano (e si complicano) se invece K è una copia di S^1 "annodata" dentro $\mathbb{R}^3$. Ad esempio, se K è il così detto *nodo trifoglio*, allora $G = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ ammette la seguente presentazione:

$$G = \langle a, b \,|\, abab^{-1}a^{-1}b^{-1}a^{-1} \rangle \ .$$

Si mostri che G è infinito e non abeliano. (Suggerimento: si cerchino omomorfismi da G a valori in un gruppo infinito, e a valori nel gruppo delle permutazioni su 3 elementi).

Esercizio 25. Siano G_1, G_2 gruppi con presentazioni

$$G_1 = \langle s_1, \ldots, s_n \,|\, r_1, \ldots, r_h \rangle \,, \qquad G_2 = \langle s'_1, \ldots, s'_{n'} \,|\, r'_1, \ldots, r'_{h'} \rangle \ ,$$

e siano F_n il gruppo libero con generatori $s_1, \ldots, s_n$ ed $F'_{n'}$ il gruppo libero con generatori $s'_1, \ldots, s'_{n'}$. Considereremo i relatori s_i, $s'_{i'}$ anche come elementi di $F_n * F'_{n'}$, tramite le inclusioni naturali di F_n e di $F'_{n'}$ in $F_n * F'_{n'}$.

Sia infine K un gruppo (non necessariamente libero) generato dagli elementi $a_1, \ldots, a_l$, e fissiamo omomorfismi $\gamma\colon K \to G_1$, $\delta\colon K \to G_2$.

(1) Si mostri che

$$G_1 * G_2 \ \cong\ \langle s_1, \ldots, s_n, s'_1, \ldots, s'_{n'} \ |\ r_1, \ldots, r_h, r'_1, \ldots, r'_{h'} \rangle \ .$$

(2) Per ogni $i = 1, \ldots, l$, siano ora $w_i \in F_n$ una parola che rappresenta l'elemento $\gamma(a_i) \in G_1$, e $w'_i \in F'_{n'}$ una parola che rappresenta l'elemento $\delta(a_i) \in G_2$.
Si mostri che

$$G_1 *_K G_2 = \langle s_1, \ldots, s_n, s'_1, \ldots, s'_{n'} \ |\ r_1, \ldots, r_h, r'_1, \ldots, r'_{n'}, w_1(w'_1)^{-1}, \ldots, w_l(w'_l)^{-1} \rangle \ .$$

Esercizi VI settimana

I primi cinque esercizi riguardano gli argomenti della lezione dell'ultima settimana. Consiglio di fare almeno i primi tre. Essendo la prossima settimana festa, abbiamo aggiunto altri cinque esercizi sui temi legati a questa parte sul gruppo fondamentale.

Esercizio 26. Le affermazioni contenute in questo esercizio o sono già state fatte a lezione o seguono immediatamente da quello che abbiamo fatto a lezione. Sono però affermazioni importanti che è forse opportuno sottolineare.

Siano $p : E \longrightarrow X$ e $p_i : E_i \longrightarrow X$ dei rivestimenti regolari di X. Sia $x_0 \in X$ e siano $y_0 \in E$, $y_i \in E_i$ dei punti sopra x_0.

(1) Se E è un rivestimento universale allora E è regolare;
(2) Se E è un rivestimento universale allora $\mathrm{Aut}_X(E) \simeq \pi_1(X, x_0)$;
(3) Se E_1 ed E_2 sono due rivestimenti universali di X alloro sono isomorfi come rivestimenti di X;
(4) Se E è un rivestimento regolare allora $\mathrm{Aut}_X(E)\backslash E \simeq X$;
(5) Esiste un morfismo di rivestimenti da E_1 a E_2 se e solo se $p_{1*}(\pi_1(E_1, y_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(E_2, y_2))$ [ricordarsi che per ipotesi gli E_i sono rivestimenti regolari];

Esercizio 27. Sia X uno spazio connesso e localmente connesso per archi, e sia $p : E \longrightarrow X$ un rivestimento universale. Sia $x_0 \in X$ e sia $y_0 \in E$ un punto sopra x_0. Si consideri l'isomorfismo $\Phi : \mathrm{Aut}_X(E) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ costruito in classe. Sia H un sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ e sia $K = \Phi^{-1}(H)$. Si consideri il quoziente $q : E \longrightarrow E' = K\backslash E$. La mappa p induce al quoziente una mappa $p' : E' \longrightarrow X$ che sappiamo essere un rivestimento. Sia $y_0' = q(y_0)$. Dimostrare che $p'_*(\pi_1(E', y_0')) = H$. [A lezione abbiamo enunciato questo fatto nel caso di H normale, come ultimissima cosa quando abbiamo classificato i rivestimenti regolari ma non l'abbiamo dimostrato. L'affermazione vale però in generale.].

Esercizio 28.

(1) Determinare tutti i rivestimenti connessi di grado due del bouquet di due cerchi a meno di isomorfismo;
(2) Fare un disegno di ognuno di questi rivestimenti;
(3) Quali di questi rivestimenti sono spazi topologici omeomorfi?

Esercizio 29.

(1) A meno di isomorfismo di rivestimento, quanti sono i rivestimenti regolari di grado tre del bouquet di due cerchi?
(2) A meno di isomorfismo di rivestimento, quanti sono i rivestimenti connessi di grado tre del bouquet di due cerchi?

Il caso non normale. Se X è connesso e semilocalmente semplicemente connesso, a lezione abbiamo fornito una corrispondenza tra sottogruppi normali del gruppo fondamentale e rivestimenti regolari. Più d'uno di voi ha osservato che questa cosa ricordava la teoria di Galois.

Se non si vuole fissare un punto base su tutti i rivestimenti, sembra però mancare una corrispondenza tra sottogruppi (anche non normali) e rivestimenti connessi (anche non regolari). In realtà il parallelo si estende anche a questo caso se stiamo attenti a formularlo correttamente. La teoria di Galois, più precisamente, dice: data una estensione $\mathbb{k} \subset \mathbb{K}$ di Galois esiste una corrispondenza tra sottogruppi e sottocampi $L \subset \mathbb{K}$ contenenti $\mathbb{k}$. Non parla di queste estensioni a meno di isomorfismo, ma parla di queste estensioni come sottoinsiemi di $\mathbb{K}$. Quello che nella teoria di Galois è sottoinsieme qui va sostituito con quoziente.

Sia $p : E \longrightarrow X$ un rivestimento. Un rivestimento intermedio è il dato di un rivestimento $r : L \longrightarrow X$ e di una mappa $q : E \longrightarrow L$ tale che $p = r \circ q$. Si dimostri intanto che, in queste ipotesi, anche q è un rivestimento. Se $r' : L' \longrightarrow X$, $q' : E \longrightarrow L'$ è un altro rivestimento intermedio, i due rivestimenti intermedi isomorfi se esiste un omeomorfismo $\varphi : L \longrightarrow L'$ tale che $q' = \varphi \circ q$ e $r = r' \circ \varphi$.

Esercizio 30. Si assuma che E sia un rivestimento regolare e che X sia localmente connesso per archi. Si dimostri che esiste una bigezione naturale tra i sottogruppi di $\mathrm{Aut}_X(E)$ e i rivestimenti intermedi a meno di isomorfismo.

Togliere sottospazi di codimensione d. La dimostrazione delle affermazioni del prossimo esercizio è un po' fastidiosa (soprattutto del terzo punto), ma il risultato è molto utile. Se non l'avete ancora fatto, potrebbe essere utile fare intanto l'esercizio 19 che è molto simile.

Esercizio 31. Sia U un aperto non vuoto e connesso di $\mathbb{R}^n$ e sia E un sottospazio affine di dimensione $n-d$. Sia $x_0 \in U \smallsetminus E$ e sia $i : U \smallsetminus E \longrightarrow U$ l'inclusione.

(1) si dimostri che se $d \geqslant 1$ allora $U \smallsetminus E$ è non vuoto;
(2) si dimostri che se $d \geqslant 2$ allora $U \smallsetminus E$ è connesso e che i_* è surgettiva;
(3) si dimostri che se $d \geqslant 3$ allora i_* è un isomorfismo.

[Questo esercizio è una generalizzazione dell'esercizio 19. L'idea è più o meno la stessa, quella di usare Van Kampen, ma alcuni dettagli vanno sistemati. Fornisco qualche suggerimento per la soluzione del terzo punto. Siano α e β due cammini da x_0 a x_0 in $U \smallsetminus E$ e supponiamo siano omotopi come cammini in U, vogliamo dimostrare che lo sono anche in $U \smallsetminus E$. Sia H l'omotopia. Se l'immagine dell'omotopia non interseca E abbiamo finito. Supponiamo che la intersechi e sia K l'intersezione tra l'immagine di H e E. K è un compatto, per tanto, ha una distanza strettamente positiva da $\mathbb{R}^n \smallsetminus U$. Possiamo costruire un aperto V, contenuto in U, e contenente l'immagine di H, tale che $V = W \cup (V \smallsetminus E)$ con W un aperto omeomorfo a $B_d \times E_0$ con B_d una palla aperta di dimensione d e E_0 un aperto di E. A questo punto possiamo applicare Van Kampen...]

Esercizio 32. Si costruisca uno spazio topologico semplicemente connesso e localmente connesso per archi con un'azione propriamente discontinua di S_3, il gruppo delle permutazioni di 3 elementi.[si consideri un'azione di S_3 su R^n molto semplice e si utilizzi l'esercizio precedente]

Incollamenti di celle. Sia X uno spazio topologico e sia $n \geqslant 1$. Sia $\varphi : \partial D_n \longrightarrow X$ una mappa continua e sia $Y = X \sqcup_\varphi D_n$ il quoziente di $X \sqcup D_n$ per la relazione di equivalenza generata da $y \sim \varphi(y)$ per ogni $y \in \partial D_n$. In tale situazione diciamo che Y è ottenuto da X

mediante l'incollamento di una n-cella. Si osservi che la proiezione al quoziente induce una immersione topologica di X in Y. Identifichiamo X con la sua immagine mediante questa inclusione.

Esercizio 33. Sia $x_0 \in \varphi(\partial D_n) \subset X$.

(1) Se $n \geqslant 3$ si dimostri che $\pi_1(Y, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0)$

(2) Se $n \geqslant 2$ allora $\partial D_2 = S^1$ e scegliamo $x_0 = \varphi(1)$. Sia β il cammino da x_0 a x_0 indotto dalla mappa φ. Si dimostri che $\pi_1(Y, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0)/([\beta])_{sgr.\ norm.\ gen.}$

[ancora Van Kampen]

Esercizio 34. Sia $G = \langle a_1, \ldots, a_m | r_1, \ldots, r_n \rangle$ un gruppo con un numero finito di generatori e di relazioni. Usando l'esercizio precedente, costruire uno spazio topologico che ha G come gruppo fondamentale.

Esercizio 35. Trattiamo ora il caso $n = 1$. Sia $x_0 = \varphi(1)$.

(1) Se $\varphi(-1) = \varphi(1)$ dimostrare che $\pi_1(Y, x_0) = \pi_1(X, x_0) \star \mathbb{Z}$.[Van Kampen]

Se X è connesso per archi, lo stesso risultato vale in generale ma la dimostrazione è un po' più complicata. I seguenti punti ne suggeriscono una dimostrazione.

Si scelga un cammino γ in X che connetta $\varphi(-1)$ e $\varphi(1)$. Le mappe φ e γ possono essere utilizzate per costruire un cammino β in Y che parte da $\varphi(1)$ arriva a $\varphi(-1)$ percorrendo $\varphi(D_1)$ e poi torna indietro percorrendo γ.

Tale cammino β può essere utilizzato per costruire una mappa $\psi : S^1 \longrightarrow Y$. Sia ora $D_2^* = D_2 \setminus \{0\}$ e sia $Z = Y \sqcup_\psi D_2^*$.

(2) Si dimostri che Y è un retratto per deformazione di Z.

(3) Si dimostri che $\pi_1(Y, x_0) \simeq \pi_1(X, x_0) \star \mathbb{Z}[\beta]$. [di nuovo Van Kampen]

Esercizi VII settimana

Consiglio di fare gli esercizi 38 e 39 che riguardano argomenti che saranno importanti nelle prossime settimane.

Esercizio 36. Si consideri la curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(t) = t \sin 1/t$. Si dimostri che è continua e che è C^1 in $(0,1)$. Sia $\omega = dx$. Si provi ad applicare la definizione di integrale data per curve C^1. Cosa non funziona?

Esercizio 37.

(1) Sia P il perimetro di un rettangolo. Percorrere P con una curva C^1 (non C^1 a tratti, ma genuinamente C^1).

(2) Se U è un aperto connesso di $\mathbb{C}$ dimostrare che per ogni $x, y \in U$ esiste un cammino C^1 che va da x a y.

Esercizio 38. Questo esercizio fornisce una dimostrazione diretta che la forma dz/z è chiusa.

Si consideri la seguente funzione $L : \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$L(z) = \log(|z|) + i \arccos(x/|z|).$$

(1) Verificare che $dL = \frac{1}{z}dz$ su $\mathcal{H}$;
(2) Calcolare $e^{L(z)}$;
(3) Definire delle primitive di $\frac{1}{z}dz$ sui semipiani $Re(z) < 0$, $Im(z) > 0$ e $Im(z) < 0$.
(4) si dimostri che la forma $\frac{1}{z}dz$ su $\mathbb{C}^*$ è chiusa.

Esercizio 39. Sia $U = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$. Sia $\omega = \frac{1}{z}dz$. Sia $I : [S^1, U] \longrightarrow \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da

$$I([\gamma]) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega.$$

Si dimostri che I è ben definita e che è bigettiva.

[Si ricorda che $[S^1, X]$ è l'insieme delle mappe da S^1 a X a meno di omotopia. Nella lezione del 4 marzo abbiamo visto la relazione tra questo spazio e il gruppo fondamentale.]

Esercizio 40. Siano $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ continue. Sia $\gamma : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definita da $\gamma(x) = \gamma_1(x) \cdot \gamma_2(x)$, dove $\cdot$ indica il prodotto di numeri complessi. Se I è la funzione introdotta nell'esercizio precedente si dimostri che

$$I([\gamma]) = I([\gamma_1]) + I([\gamma_2]).$$

Esercizi VIII settimana

Esercizio 41. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ un aperto. Un logaritmo $L\colon \Omega \to \mathbb{C}$ si dice *massimale* se non esistono un aperto $\widehat{\Omega} \subseteq \mathbb{C}^*$ tale che $\Omega \subsetneq \widehat{\Omega}$ e $\widehat{L}|_\Omega = L$.

(1) Si dimostri che un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^*$ è il dominio di un logaritmo se e solo se $I(\gamma, 0) = 0$ per ogni cammino chiuso γ a valori in Ω.
(2) Si determini un logaritmo massimale $L\colon \Omega \to \mathbb{C}$ tale che $1 \in \Omega$ e $L(1) = 0$.
(3) La scelta fatta al punto precedente è unica?

Esercizio 42. Si considerino le seguenti forme su $\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z| < 2\pi\}$:

$$\omega_1 = \frac{1}{z^2}dz\,, \qquad \omega_2 = \frac{1}{e^z - 1}dz\,, \qquad \omega_3 = \frac{1}{\overline{z}}dz\,, \qquad \omega_4 = \frac{1}{\overline{z}}d\overline{z}\ .$$

Quali di esse sono chiuse? Quali di esse sono esatte?

Esercizio 43. Si disegni una curva chiusa $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0,1,2\}$ tale che

$$I(\gamma, 0) = 1, \qquad I(\gamma, 1) = -1\,, \qquad I(\gamma, 2) = 2\ .$$

Esercizio 44. Siano a, b numeri reali positivi. Si calcoli

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\ .$$

(Suggerimento: sia $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una parametrizzazione del bordo dell'ellisse di centro 0 e semiassi a e b; si consideri poi $\int_\gamma dz/z$).

Esercizio 45. Il seguente esercizio descrive una dimostrazione puramente topologica del Teorema Fondamentale dell'Algebra. Sia $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio monico di grado d, $d \geqslant 1$:

$$p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \ .$$

Supponiamo per assurdo che valga $p(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Per ogni $R \geqslant 0$, sia

$$\gamma_R\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}\,, \qquad \gamma(t) = p(Re^{2\pi i t}) \ .$$

(1) Si osservi che $\gamma_R(t) \neq 0$ per ogni $R \geqslant 0$, $t \in [0, 2\pi]$, per cui è ben definito $I(\gamma_R, 0)$.
(2) Si mostri che $I(\gamma_R, 0)$ non dipende da R.
(3) Si calcoli $I(\gamma_0, 0)$.
(4) Sia $\alpha_R\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\alpha_R(t) = R^d e^{2\pi d i t}$. Si mostri che esiste $R_0 > 0$ tale che $|\gamma_R(t) - \alpha_R(t)| < |\alpha_R(t)|$ per ogni $R > R_0$, $t \in [0, 2\pi]$.
(5) Si deduca dal punto precedente che γ_R ed α_R sono liberamente omotope in $\mathbb{C}^*$, e se ne deduca che $I(\gamma_R, 0) = I(\alpha_R, 0)$.
(6) Per $R > R_0$, si calcoli $I(\gamma_R, 0)$, e si osservi che il risultato contraddice (b) e (c).

Esercizi IX settimana

Esercizio 46. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa e sia $z_0 \in U$. Si supponga inoltre che f non sia identicamente nulla in un intorno di z_0. Si dimostri che l'ordine di svanimento di f in z_0 è il minimo n tale che $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. [Con $f^{(n)}$ indico la derivata n-sima di f.]

Esercizio 47. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua tale che la forma $\omega = f(z)dz$ sia chiusa.

(1) si dimostri che se F è una primitiva locale di ω allora F è olomorfa [per questo punto non serve quello che avete fatto questa settimana];
(2) si dimostri che f è olomorfa.

Esercizio 48. Sia $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione continua e sia $\mathcal{R}$ una retta nel piano. Se f è olomorfa in $U \smallsetminus \mathcal{R}$ allora f è olomorfa dappertutto. [utilizzare l'esercizio precedente]

Esercizio 49. Sia $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa che assume valori reali sull'asse reale. Dimostrare che $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Esercizio 50. Sia $f : B(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, sia $0 < r < R$ e sia $\gamma(t) = re^{it}$ definita in $[0, 2\pi]$. Dimostrare la seguente formula di Cauchy per il calcolo della derivata n-esima di f:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

per $|z| < r$. [per induzione usando la definizione di derivata e mostrando che passa dentro l'integrale]

Esercizio 51. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto. Una funzione $u\colon U \to \mathbb{R}$ si dice *armonica* se è di classe C^2 e $\Delta u = 0$, dove

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ .$$

Nel seguito, sottointenderemo sempre l'usuale identificazione di $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$.

(1) Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, e sia $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$, dove u, v sono funzioni a valori reali. Si mostri che u e v sono armoniche (suggerimento: si usino le formule di Cauchy-Riemann).

(2) Sia $u\colon U \to \mathbb{R}^2$ armonica, e sia $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$. Si mostri che ω è chiusa.

(3) Sia $u\colon U \to \mathbb{R}^2$ armonica, e si supponga che U sia semplicemente connesso. Si mostri che esiste $v\colon U \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $dv = \omega$, dove ω è la forma definita al punto precedente, e se ne deduca che la funzione $f\colon U \to \mathbb{C}$, $f(x+iy) = u(x+iy)+iv(x+iy)$ è olomorfa.

(4) Si mostri che una funzione armonica (che, stando alla definizione, è di classe C^2) è in effetti automaticamente di classe C^∞.

Esercizio 52. Nell'esercizio precedente abbiamo visto che la parte reale di una funzione olomorfa è armonica, e che, su domini semplicemente connessi, vale in effetti anche il viceversa. Si esibisca una funzione armonica $u\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ che non sia la parte reale di una funzione olomorfa definita su tutto $\mathbb{C}^*$ (suggerimento: nell'esercizio precedente, la semplice connessione di U viene usata per asserire che una forma chiusa ammette una primitiva; si parta perciò da una forma chiusa ma non esatta su $\mathbb{C}^*$).

Esercizio 53. Sia $d \in \mathbb{N}$ e sia $K \in \mathbb{R}$ una costante non negativa.

(1) Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa tale che $|f(z)| \leqslant K \cdot |z|^d$. Si mostri che f è un polinomio di grado al più d (suggerimento: si sfruttino le disuguaglianze di Cauchy sui coefficienti dello sviluppo di f).

(2) Sia $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione meromorfa avente un numero finito di poli, e tale che $|f(z)| \leqslant K \cdot |z|^d$. Si mostri che f è il rapporto di due polinomi.

Esercizio 54. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Si dimostri che l'insieme delle funzioni meromorfe su U, con le usuali operazioni di somma e prodotto, forma un campo.

Esercizio 55. Siano U un aperto di $\mathbb{C}$ e z_0 un punto di U, e sia $f\colon U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Si supponga che z_0 sia un polo di ordine k per f. Si mostri che, se $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$, allora g si estende ad una funzione olomorfa in z_0 (che indicheremo ancora con g), e che

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \ .$$

Sia ora $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0, i, -i\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)} \ .$$

Si calcolino $\mathrm{Res}(f,0)$ e $\mathrm{Res}(f,i)$.

Esercizio 56. Siano $f,g\colon \mathbb{C}^*\to\mathbb{C}$ definite da $f(z)=e^{1/z}$, $g(z)=\frac{e^{z^2}-1}{z^5}$. Si discuta quale tipo di singolarità abbiano f e g in 0 (nel caso di un polo, se ne calcoli l'ordine).

Esercizio 57. Questo esercizio ha lo scopo di calcolare $\int_0^{+\infty}(\sin t)/t\,dt$. Sia $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la funzione meromorfa $f(z)=e^{iz}/z$. Inoltre, per ogni $R>0$ consideriamo la regione

$$D_R=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1/R\leqslant|z|\leqslant R\,,\ \mathrm{Im}(z)\geqslant 0\}\ .$$

Si consideri la parametrizzazione positiva di ∂D_R data da $\alpha_R*\beta_R*\gamma_R*\delta_R$, dove

$$\begin{aligned}\alpha_R\colon[-R,-1/R]\to\mathbb{C}\,,&\qquad \alpha_R(t)=t\ ,\\ \beta_R\colon[0,\pi]\to\mathbb{C}\,,&\qquad \beta_R(t)=(1/R)e^{i(\pi-t)}\ ,\\ \gamma_R\colon[1/R,R]\to\mathbb{C}\,,&\qquad \gamma_R(t)=t\ ,\\ \delta_R\colon[0,\pi]\to\mathbb{C}\,,&\qquad \delta_R(t)=Re^{it}\ .\end{aligned}$$

(1) Si determinino i poli di f, calcolandone i relativi residui.
(2) Si mostri che $\lim_{R\to+\infty}\int_{\beta_R}f(z)\,dz=-(1/2)\mathrm{Res}(f,0)$ (suggerimento: si scriva lo sviluppo in serie di Laurent di f vicino a 0, e si integrino separatamente il termine di esponente -1 ed il resto della serie, per poi passare al limite).
(3) Si mostri che $\lim_{R\to+\infty}\int_{\delta_R}f(z)\,dz=0$ (attenzione: la stima è un po' più delicata di quelle fatte in aula).
(4) Si calcoli $\int_0^{+\infty}(\sin t)/t\,dt$.

Esercizi XI settimana

Esercizio 58. Si determini il gruppo degli automorfismi di Δ^*.

Esercizio 59. Si dimostri che Δ^* non è isomorfo a $\mathbb{C}^*$

Esercizio 60. Sia $f:\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{C}$ una funzione olomorfa, Si dimostri che f ècostante.

Esercizio 61. Sia $f:\mathbb{P}^1\longrightarrow\mathbb{P}^1$ una funzione olomorfa non costante. Si dimostri che esistono dei polinomi P e Q primi tra loro tali che

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$

per ogni $z\in\mathbb{C}\smallsetminus Z(Q)$.

Esercizio 62. Sia $\Delta^*=\Delta\smallsetminus\{0\}$. Siano $\varphi_i:\Delta^*\longrightarrow\mathbb{C}$ funzioni omolorfe con un polo in 0. Dimostrare che la funzione $\varphi:\Delta^*\longrightarrow\mathbb{P}^n$ definita da $\varphi(z)=[\varphi_0(z),\ldots,\varphi_n(z)]$ si estende ad una funzione continua da $\Delta\longrightarrow\mathbb{P}^n$.

Esercizio 63. Sia A l'insieme delle coppie (U,f) tale che U è un intorno di 0 e $f:U\longrightarrow\mathbb{C}$ è una funzione olomorfa. Diciamo che (U,f) è equivalente a (V,g) se esiste un intorno W di 0 contenuto in $U\cap V$ tale che $f|_W=g|_W$.

Sia $\mathcal{O}$ il quoziente di A rispetto a questo relazione di equivalenza. Si dimostri che il prodotto e la somma di funzioni definiscono una somma e un prodotto su $\mathcal{O}$ e si dimostri che $\mathcal{O}$ è un anello ad ideali principali.

Esercizi sparsi

Esercizio 64. Sia $\Gamma = \Gamma_0(4) \subset SL(2, \mathbb{Z})$ il sottogruppo delle matrici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $a, b, c, d \in mZ$ e c divisibile per 4. Si può dimostrare (ma questo non fa parte dell'esercizio) che Γ agisce in modo propriamente discontinuo sul semipiano di Poincaré $\mathcal{H}$ e che il quoziente di tale azione è isomorfo a $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ e che la mappa quoziente $q : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ è olomorfa.

Si utilizzi questo fatto per dimostrare che se $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una funzione olomorfa non costante allora l'immagine di f è tutto $\mathbb{C}$ tranne al più un punto. [si proceda per assurdo, si suppnga che esistano due punti a e b che non stanno nell'immagine. Si mostri che si puo' assumere che a e b siano 0 e 1 e si utilizzi il teorema del sollevamente di una mappa ad un rivestimento]

Esercizio 65. Si consideri la serie di Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$. Questo esercizio indaga un'altra possibile strada di definire la convergenza di una tale serie. Supponiamo che esistano due valori z_0 e z_1 con $|z_0| < |z_1|$ tali che esistono i limiti delle due somme parziali simmetriche

$$\sum_{-N}^{N} a_n z_0^n \qquad \text{e} \qquad \sum_{-N}^{N} a_n z_1^n \ .$$

Allora la serie di Laurent è convergente (ovvero converge sia la serie degli esponenti positivi sia la serie degli esponenti negativi) nella regione $|z_0| < |z| < |z_1|$.

Esercizio 66. Sia D il disco di raggio 1 e centro 0 in $\mathbb{C}$ e sia $\omega = e^{i\pi/4}$. Sia T il toro $D/\sim$ dove per $u \in \partial D$ abbiamo posto

$$u \sim \overline{u} \qquad \text{se } |Re(u)| > \sqrt{2}/2$$
$$u \sim -\overline{u} \qquad \text{se } |Re(u)| < \sqrt{2}/2$$
$$\omega \sim -\omega \sim \overline{\omega} \sim -\overline{\omega}.$$

Sia S la sfera $D/\simeq$ dove per $u \in \partial D$ abbiamo posto

$$u \simeq \overline{u}.$$

La funzione $f : D \longrightarrow D$ definita da $f(u) = u^2$ induce una applicazione continua g tra T e S. Sia $\omega = e^{i\pi/4}$ e sia

$$\tilde{T} = D \setminus \{0, \pm 1, \pm i, \pm\omega, \pm\overline{\omega}\}/\sim \qquad \text{e sia} \qquad \tilde{S} = D \setminus \{0, \pm 1, \pm i\}/\simeq .$$

Sia $h : \tilde{T} \longrightarrow \tilde{S}$ la restrizione di g a $\tilde{T}$.

(1) Si dimostri che h è un rivestimento 2 a 1 di $\tilde{S}$.

(2) Si calcoli il gruppo fondamentale di $\tilde{T}$ e $\tilde{S}$ e se ne descrivano dei generatori espliciti e le relazioni tra di essi.
(3) Si descriva la mappa $\Pi_1(h)$ utilizzando i generatori descritti al punto precedente.

Esercizio 67. Si determinino tutti i rivestimenti doppi di $\mathbb{P}^1 \setminus \{-1, 0, 1, \infty\}$. Non si chiede di calcolarli ma per ogni rivestimento di descriverlo esplicitamente.

Esercizio 68. Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ tre punti distinti. Si dimostri che il cerchio passante per a, b, c (eventualmente la retta passante per a, b, c nel caso siano allineati) è l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tale che il birapporto (z, a, b, c) è un numero reale. Se ne deduca che una trasformazione di Moëbius manda rette e cerchi in rette e cerchi.