FUNZIONI DI MATRICI

Note Title 2021-03-04

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad p(x) = 1 + 3x - 5x^3$

$$p(A) = I + 3A - 5A^3$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_{4\times4} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 \\ & 0 & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad J^4 = 0$$

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_d x^d$$

$$p(J) = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & p_2 \\ & 0 & & & p_1 \\ & & & & p_0 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \qquad p(J) = ?$$

Scriviamo $\quad p(x) = p(\lambda) + p'(\lambda)(x-\lambda) + \dfrac{p''(\lambda)}{2}(x-\lambda)^2 + \dots + \dfrac{p^{(d)}(\lambda)}{d!}(x-\lambda)^d$

$$p(J) = p(\lambda)I + p'(\lambda)(J - \lambda I) + \frac{p''(\lambda)}{2}(J-\lambda I)^2 + \dots + \frac{p^{(d)}}{d!}(J-\lambda I)^d$$

$$= \begin{bmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{p^{(n-1)}}{(n-1)!} \\ & p(\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{p''(\lambda)}{2} \\ & 0 & & \ddots & p'(\lambda) \\ & & & & p(\lambda) \end{bmatrix}$$

$\leftarrow$ posso usare la stessa formula anche per funzioni non polinomiali

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad A = S \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} S^{-1}$

$$p(A) = S \begin{bmatrix} p(J_1) & & & \\ & p(J_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & p(J_s) \end{bmatrix} S^{-1}$$

<u>Def</u>: Data $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con forma di Jordan

$$A = S \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} S^{-1}, \text{ definiamo } f(A) := S \begin{bmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{bmatrix} S^{-1},$$

con

$$f(J_i) := \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{f''}{2}(\lambda_i) & \cdots & \frac{f^{(k-1)}}{k!}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''}{2}(\lambda_i) \\ & 0 & & \ddots & f'(\lambda_i) \\ & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Diciamo che f è definita sullo spettro di A (o "in A") se è derivabile almeno $n_i - 1$ volte in λ_i, dove λ_i sono gli autovalori di A e n_i sono le dimensioni dei blocchi di J.

<u>Dubbio</u>: dipende da S (non unico!) ?

<u>Def. 2</u>: $f(A) := p(A)$, dove $p(A)$ è un polinomio tale che

$$f(\lambda_i) = p(\lambda_i) \quad f'(\lambda_i) = p'(\lambda_i), \ \ldots \quad f^{(n_i - 1)}(\lambda_i) = p^{(n_i - 1)}(\lambda_i) \qquad i = 1, \ldots s$$

(dove λ_i autoval. di A, n_i dim. dei blocchi di Jordan relativi

Questo non dipende da S, e neppure da p

$$\begin{array}{cc} f(A) & f(B) \\ \shortparallel & \shortparallel \\ p(A) & q(B) \end{array} \qquad p \neq q$$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\boxed{p(4)} = f(4) = \boxed{2}$$

$$\boxed{p'(4)} = f'(4) = \boxed{1/4}$$

$$\boxed{p''(4)} = f''(4) = \boxed{-1/32}$$

$$\boxed{p(0)} = f(0) = \boxed{0}$$

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 3\cdot 4^2 & 2\cdot 4 & 1 & 0 \\ 6\cdot 4 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1/4 \\ -1/32 \end{bmatrix}$$

$$p(x) = \frac{3}{256}x^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{15}{16}x$$

"$\sqrt{A}$" $\quad f(A) = p(A) = \frac{3}{256}A^3 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{15}{16}x$

<u>Teo:</u> (Interpolazione di Hermite)

Dati $x_1, x_2, \dots x_s$, $m_1, m_2, \dots m_s$, esiste uno e un solo polinomio di grado $d < m_1 + m_2 + \dots + m_s$ tale che $\forall i = 1, 2, \dots s$

$$p(x_i) = y_{i,0} \quad p'(x_i) = y_{i,1} \quad p''(x_i) = y_{i,2} \quad \dots \quad p^{(m_i-1)}(x_i) = y_{i,m_i-1}$$

per ogni scelta degli $y_{i,j}$.

<u>Dim:</u> È un sistema lineare $(m_1 + \dots + m_s) \times (m_1 + \dots + m_s)$ nei coefficienti

$p_0, p_1, p_2, \dots p_{\Sigma m_i - 1}$

$$Vp = y$$

Ci basta dimostrare che la matrice associata è invertibile.

Supponiamo per assurdo che V abbia kernel, $Vz = 0 \quad z \neq 0$

$\Updownarrow$

sul polinomio $z(x)$ con coefficienti gli z_i. $\quad z(x_i) = 0, \; z'(x_i) = 0, \dots z^{(m_i-1)}(x_i) = 0$

$\forall i = 1, 2, \dots S$

$\Rightarrow z(x)$ ha uno zero di molteplicità m_i in x_i $\quad \forall i=1, \dots, s$

$\Rightarrow z(x)$ multiplo di $\prod_{i=1}^{s} (x-x_i)^{m_i}$ $\Rightarrow z(x)=0$ perché ha grado $< m_1 + \dots + m_s$

assurdo, $z=0$. $\square$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$f'(0)$ non definita $\Rightarrow$ $f(A)$ non definita

infatti $X^2 = A$ non ha soluzioni:

se ce le avesse, $X^4 = 0$ $\Rightarrow X$ ha solo l'autoval. 0

$\Rightarrow X$ ha forma di Jordan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ o $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, e in entrambi i casi $X^2 = 0$.

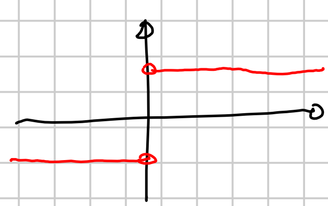
$$A = S \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{0} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} S^{-1} \qquad f(x) = \exp(x)$$

$$\exp(A) = S \begin{bmatrix} \boxed{e^{-1}} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} e & e \\ 0 & e \end{matrix}} \end{bmatrix} S^{-1}$$

Coincide con la def. con la serie $\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$

$$A = S \begin{bmatrix} \boxed{-3} & & 0 \\ & \boxed{-2} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} S^{-1}$$

$$f(x) = \mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \mathrm{Re}(x) > 0 \\ -1 & \mathrm{Re}(x) < 0 \end{cases}$$



non def. se $\mathrm{Re}(x) = 0$

$$f(A) = S \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & \\ & \boxed{-1} & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{bmatrix} S^{-1}$$

non è costante a tratti

In particolare, sapendo calcolare $f(A)$, so calcolare anche

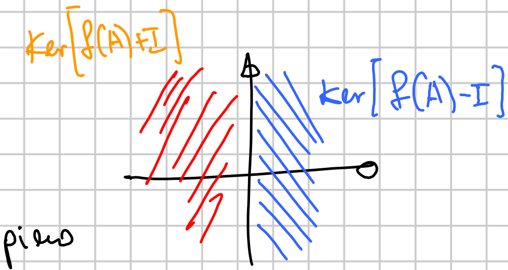
$$\operatorname{Ker}\big(f(A)+I\big), \quad \operatorname{Ker}\big(f(A)-I\big)$$

$$= \operatorname{span}(v_1, v_2) \qquad = \operatorname{span}(v_3, v_4)$$

autovett. relativi a $-3, -2$ $\qquad$ catena di Jordan relativa a 1

$$S = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{bmatrix}$$

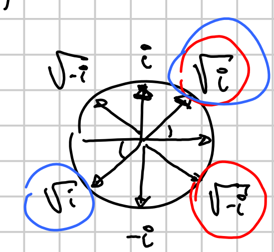
$\Rightarrow$ con $f(A)$ posso calcolare i sotto-sp. inv relativi agli autovalori nel semipiano sx e dx



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Lambda(A) = \{+i, -i\} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(i) = +\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

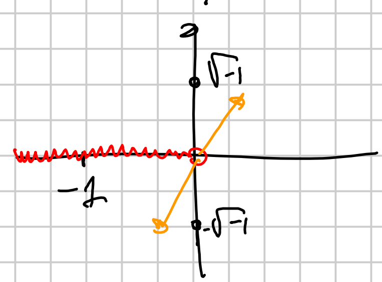
$$f(-i) = +\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$$



$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+x) \qquad f(A) = p(A) = \frac{1}{\sqrt{2}}(I+A)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Questa è la <u>radice principale</u> di A, cioè quella con tutti gli autovalori nel semipiano dx



Altra scelta possibile:

$$g(i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$g(-i) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)$$

Polinomio di interpolazione: $\frac{x+i}{2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\right) + \frac{x-i}{-2i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(i-1)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2i}\Big((x+i)(1+i)-(x-i)(i-1)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2i}(2x-2) = \frac{1}{\sqrt{2}\, i}(x-1)$$

$$f(A) = \frac{1}{\sqrt{2}\, i}(A-I) = \frac{1}{\sqrt{2}\, i}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

non reale, a differenza della precedente

$$A = S\begin{bmatrix} \boxed{1} & & \\ & \boxed{1} & \\ & & \boxed{2} \end{bmatrix}S^{-1} \qquad f(x) = \sqrt{x}$$

$f(1) = \pm 1$
$f(2) = \pm 2$ che mi danno 4 scelte diverse di "branch"

La nostra definizione non può produrre

$$f(A) \neq S\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}S^{-1}.$$

Questa è una soluzione di $X^2 = A$, ma non è una funzione di A (con le nostre definizioni) "non-primary square roots of A"

non è un polinomio in A

$$p(A) = S\begin{bmatrix} p(1) & 0 & \\ & p(1) & \\ 0 & & p(2) \end{bmatrix}S^{-1}$$

Proprietà: se A ha autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_s$,

allora $f(A)$ ha autovalori $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots f(\lambda_s)$

molt. algebriche restano uguali, geometriche possono cambiare

ES se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$ $\quad f(A) = \begin{bmatrix} f(0) & 0 & * & * \\ & f(0) & 0 & * \\ & & f(0) & 0 \\ & & & f(0) \end{bmatrix}$

se $f'(0)=0$, allora $f(A)$ ha struttura di Jordan diversa da quella di A (difetti, $(f(A)-f(0)I)^3=0$, ma $(A-I)^3\neq 0$)

<u>Proprietà</u>: $f(A)g(A)=g(A)f(A)=(fg)(A)$

(perché sono tutti polinomi in A, e queste sono proprietà vere per i polinomi)

$$f(A)+g(A)=(f+g)(A) \qquad (f\circ g)(A)=f(g(A))$$

<u>Proprietà</u>: se $f_n\to f$, $f_n'\to f'$, ... $f_n^{(n_i-1)}(\lambda_i)\to f^{(n_i-1)}(\lambda_i)$

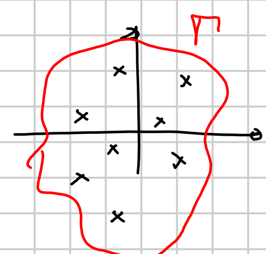
$$f_n(A)\to f(A)$$

<u>Meno ovvio</u>: se $A_n\to A$ f, è vero che $f(A_n)\to f(A)$?

<u>Proprietà</u>:

se f è olomorfa dentro un contorno Γ che contiene tutti gli autovalori di A,

$$(*) \quad f(A)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-A)^{-1}\,dz$$



$$f^{(n-1)}(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-y)^n}\,dz$$

(se Γ contiene y)

<u>Dim</u>:

Cambio base in modo che A sia in forma di Jordan, e mi basta dimostrare la (*) per un blocco di Jordan

$$RHS=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} z-\lambda & -1 & & 0 \\ & z-\lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & z-\lambda \end{bmatrix}^{-1} dz=$$

$\Updownarrow$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} \frac{1}{z-\lambda} & \frac{1}{(z-\lambda)^2} & \frac{1}{(z-\lambda)^3} & \cdots & \frac{1}{(z-\lambda)^n} \\ & \frac{1}{z-\lambda} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{1}{(z-\lambda)^3} \\ & 0 & & \ddots & \frac{1}{(z-\lambda)^2} \\ & & & & \frac{1}{z-\lambda} \end{bmatrix} dz$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}dz & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2} & \cdots & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^2} \\ 0 & & & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-\lambda}dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ & f(\lambda) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{f''(\lambda)}{2} \\ & & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & & f(\lambda) \end{bmatrix} =$$

$$= f(J)$$