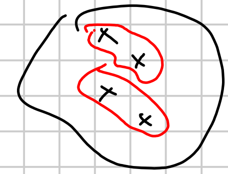
Teo: f olomorfa su e dentro Γ che include tutti gli autoval. di A

allora,



$$\boxed{f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(zI-A)^{-1}\,dz}$$

dim: $A = VJV^{-1}$

$$f(A) = V f(J) V^{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-A)^{-1}dz = V \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,(zI-J)^{-1}dz}_{=\operatorname{diag}(\square,\,\square,\,\dots\,\square_s)} \cdot V^{-1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-J_k)^{-1}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} z-\lambda & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & z-\lambda \end{bmatrix}^{-1} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\begin{bmatrix} (z-\lambda)^{-1} & (z-\lambda)^{-2} & \dots & (z-\lambda)^{-n_k} \\ & (z-\lambda)^{-1} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & (z-\lambda)^{-2} \\ 0 & & & (z-\lambda)^{-1} \end{bmatrix} dz =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{-1}} & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{-2}} & \dots & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{-n_k}} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-\lambda)^{-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \dots & f^{(n-1)}(\lambda) \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f'(\lambda) \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix} = f(J_k) \qquad \square$$

CALCOLO INVERSA:

$$\left((z-\lambda)I - J_0\right)^{-1}$$

$$(z-\lambda)^{-1}\left(I - \frac{1}{z-\lambda}J_0\right)^{-1}$$

$$= (z-\lambda)^{-1}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(z-\lambda)^k}J_0^k$$

Cor: se $\{A_n\} \to A$, allora $f(A_n) \to f(A)$

(per ogni f olomorfa intorno agli autoval. di A)

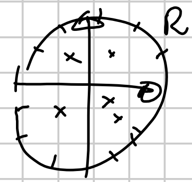
La formula integrale fornisce un primo modo di calcolare f. di matrici:

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(zI-A)^{-1}\,dz \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} f(z_k)\,(z_k I - A)^{-1}$$

N punti

$$z_k = R\exp\left(\frac{-2\pi i k}{N}\right)$$



Utile ad es. per calcolare $f(A)\cdot b$ per A grande e sparsa:

$$f(A)\,b \approx \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} f(z_k)\underbrace{(z_k I - A)^{-1} b}_{N \text{ sist. lineari}}$$

Metodi di calcolo di funzioni di matrici:

$$A = V\cdot\Lambda\cdot V^{-1} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$f(A) = f(V\Lambda V^{-1}) = V f(\Lambda) V^{-1} = V \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & & \\ & f(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1}$$

ok se A simmetrica/Hermitiana/normale (i.e., possiamo prendere V ortogonale)

Supponendo esatta l'uguaglianza $A = V\Lambda V^{-1}$, se calcolo numericamente $\tilde f(\lambda_i)$ con $|\tilde f(\lambda_i) - f(\lambda_i)| \le \varepsilon$

$$\|\tilde f(A) - f(A)\| = \left\| V \begin{bmatrix} \tilde f(\lambda_1) - f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde f(\lambda_n) - f(\lambda_n) \end{bmatrix} V^{-1} \right\| \le \|V\|\cdot\varepsilon\cdot\|V^{-1}\| = K(V)\cdot\varepsilon$$

ok se V ortogonale, può essere instabile altrimenti

ES: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (blocco di Jordan in 2), $f = \text{sqrt}$

Posso calcolare $f(A)$ con un polinomio di interpolazione

$$p(2) = f(2) = \sqrt{2}$$ $$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

$$p'(2) = f'(2) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$ $$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$

$$p(x) = \underbrace{\sqrt{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} x + \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) calcolo tramite polinomi

Domanda: qual è il metodo più economico di valutare un polinomio generico $p(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_d x^d$ in una matrice A?

Nel caso scalare, la risposta è il metodo di Horner:

$$p(x) = \left(\cdots \left(\left(\left(p_d x + p_{d-1} \right) x + p_{d-2} \right) x + p_{d-3} \right) x + \dots \right) x + p_0$$

$d-1$ prodotti
d somme

che va meglio di: calcolo $x, x^2, x^3, \dots, x^d$ — $d-1$ prodotti

e poi sommo $p_0 + p_1 x + \dots + p_d x^d$ — d prodotti + d somme

Nel caso matriciale (X matrice, p_i scalari)

Horner: $d-1$ prodotti di matrici $O(n^3(d-1))$

d somme di matrici $O(n^2 d)$

tradizionale: $d-1$ prod. di matrici $O(n^3(d-1))$

d prodotti scalare-matrice e somme di matrici $O(n^2 d)$

Stesso costo (a meno di termini di ord. inferiore)

C'è un metodo che li batte entrambi (Paterson-Stockmeyer)

Idea: divido in $\sqrt{d}$ pezzi lunghi $\sqrt{d}$

es: polinomio di grado 8

$$\left(p_8A^2+p_7A+p_6I\right)\left(A^3\right)^2+\left(p_5A^2+p_4A+p_3I\right)\cdot A^3+\left(p_2A^2+p_1A+p_0I\right)$$

Per calcolare in questa forma, devo fare

$O(\sqrt{d})$ 2 prodotti per calcolare A^2, A^3, 1 per $(A^3)^2$, $O(\sqrt{d})$

2 per $\left(p_8A^2+p_7A+p_6I\right)\cdot\left(A^3\right)^2$ e $\left(p_5A^2+p_4A+p_3I\right)\cdot A^3$ $O(\sqrt{d})$

$\Rightarrow$ 5 prodotti anziché 7 $O(\sqrt{d})$ anziché $O(d)$ prodotti matrice - matrice

(però $O(n^2\sqrt{d})$ locazioni intermedie di memoria)

Stabilità? Tutti i metodi sono stabili solo rispetto al "polinomio valore assoluto": calcolano $\tilde{Y} \approx Y = p(X)$

tali che

$$|\tilde{Y}-Y| \le O(du)\left(|p_0|+|p_1|\cdot|X|+|p_2|\cdot|X|^2+\dots+|p_d|\cdot|X|^d\right)$$

valore calcolato di X^2 ha errore $O(u)|X|\cdot|X|$

$$|X| = \begin{bmatrix} |x_{11}| & |x_{12}| & \cdots & |x_{1n}| \\ \vdots & & & \\ |x_{n1}| & \cdots & & |x_{nn}| \end{bmatrix}$$

(Parentesi: come mai compare $|X|$)

$$\tilde{y} = fl\left(\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_d \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{bmatrix}\right) = a_1 \odot b_1 \oplus a_2 \odot b_2 \oplus \cdots \oplus a_n \odot b_n$$

$|\delta_i| \le u$

$$= a_1b_1(1+\delta_1) \oplus a_2b_2(1+\delta_2) \oplus \dots \oplus a_nb_n(1+\delta_n)$$

$$\left(\cdots\left(\left(a_1b_1(1+\delta_1)+a_2b_2(1+\delta_2)\right)(1+\epsilon_2)+a_3b_3(1+\delta_3)\right)(1+\epsilon_3)+\dots+a_nb_n(1+\delta_n)\right)(1+\epsilon_n)$$

$$\doteq a_1b_1(\underbrace{1+\delta_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\dots+\epsilon_n}_{\text{al più } n})+a_2b_2(1+\delta_2+\epsilon_2+\dots+\epsilon_n)+\dots+a_nb_n(1+\delta_n+\epsilon_n)$$

$$|\tilde{y}-y| \leq \begin{bmatrix}|a_1| & |a_2| & \cdots & |a_n|\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}|b_1| \\ |b_2| \\ \vdots \\ |b_n|\end{bmatrix} \cdot O(u)$$

$|\delta_i|, |\epsilon_i| \leq u$

$$|\tilde{y}-y| = |a_1 b_1(\delta_1+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n) + a_2 b_2(\delta_2+\epsilon_2+\cdots+\epsilon_n) + \cdots + a_n b_n(\delta_n+\epsilon_n)|$$

$$\leq |a_1|\cdot|b_1|\cdot nu + |a_2||b_2|\cdot nu + \cdots |a_n|\cdot|b_n|\cdot nu$$

$$= nu \begin{bmatrix}|a_1| & \cdots & |a_n|\end{bmatrix} \begin{bmatrix}|b_1| \\ \vdots \\ |b_n|\end{bmatrix}$$

es. $\begin{bmatrix}10^8+1 & 10^8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix} = 1$

errore controllato da $\begin{bmatrix}10^8+1 & 10^8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix} = 2\cdot 10^8$

Applicando elem. per elemento,

$$|fl(AB) - AB| \leq O(nu)\,|A|\cdot|B|$$

Per una matrice non-normale, anche gli autoval. calcolati hanno errore $O(\kappa(V)u)$, quindi non riesco a calcolare poly. di interpolazione in modo affidabile
$\Rightarrow$ voglio $f(x) \approx p(x)$ su tutta una regione in cui possono trovarsi gli autovalori; ad esempio, polinomio di Taylor

Q: è vero che le serie di Taylor di $f(A)$ convergono?

<u>Teo</u>: supponiamo $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (x-\alpha)^k$, $f_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}$

con raggio di convergenza r. Allora,

$$\lim_{d\to\infty} \sum_{k=0}^{d} f_k (A-\alpha I)^k = f(A)$$

per ogni matrice A che ha autovalori in $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda-\alpha| < r\}$

$$A = V \cdot J \cdot V^{-1} \qquad f(A) = V f(J) V^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{d} f_k (A - \alpha I)^k = V \left(\sum_{k=0}^{d} (J - \alpha I)^k \right) V^{-1}$$

Mi basta verificare su ogni blocco di Jordan che $J = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}}_{n}$

$$\lim_{d \to \infty} \sum_{k=0}^{d} f_k \underbrace{(J - \alpha I)^k}_{} = f(J)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda-\alpha & 1 & & \\ & \lambda-\alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda-\alpha \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} (\lambda-\alpha)^k & \frac{k(\lambda-\alpha)^{k-1}}{2} & \frac{k(k-1)}{2\cdot 3}(\lambda-\alpha)^{k-2} & \cdots & \frac{k(k-1)\cdots(k-n+2)}{(n-1)!}(\lambda-\alpha)^{k-n+1} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{k(k-1)}{2\cdot 3}(\lambda-\alpha)^{k-2} \\ & & & \ddots & \frac{k(\lambda-\alpha)^{k-1}}{2} \\ & & & & (\lambda-\alpha)^k \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{d} f_k (J - \alpha I)^k = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{d} f_k (\lambda-\alpha)^k & \sum_{k=0}^{d} f_k k (\lambda-\alpha)^{k-1} & \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{d} f_k k(k-1)(\lambda-\alpha)^{k-2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \sum_{k=0}^{d} f_k k (\lambda-\alpha)^{k-1} \\ & & & \sum_{k=0}^{d} f_k (\lambda-\alpha)^k \end{bmatrix} \to f(J)$$

Sulle sopradiagonali, derivate dei polinomi di Taylor (termine a termine)

Visto che si possono derivare termine a termine serie di potenze,

$$\sum_{k=0}^{d} f_k k (\lambda - \alpha)^{k-1} \to f'(\lambda)$$ (con lo stesso raggio di convergenza)

Quindi posso usare questi sviluppi, ad es. $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad \forall A$

Non sempre funziona bene

es: prendiamo $A = \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ -30 & 0 \end{bmatrix}$ $\exp(A) = \begin{bmatrix} \cos 30 & \sin 30 \\ -\sin 30 & \cos 30 \end{bmatrix}$

"hump phenomenon": $\frac{1}{k!} A^k$ cresce fino a 10^{12} prima di converge a zero.

$f(x) = \sqrt{x}$ $\boxed{f(x)^2 - x} = 0$

$$f(A)\,g(A) = (fg)(A)$$

$$f(A)^2 = (f^2)(A) = A$$