LEZIONE 19

ANALISI 2

M. NOVAGA

11/3/2021

MISURA E INTEGRAZIONE SU K-SUPERFICI

COS'È UNA K-SUP. REGOLARE (C^1 O C^1 A TRATTI):

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ CHIUSO T.C. $\forall x_0 \in \Sigma$ $\exists \rho > 0$ E
$\exists \varphi : U \to \mathbb{R}^n$ DI CLASSE C^1, CON $U \subseteq \mathbb{R}^k$ APERTO,
$rk(D\varphi) = k$ E $\varphi(U) = \Sigma \cap B_\rho(x_0)$

COME SI CALCOLA LA MISURA K-DIM. DI Σ ?

① SUPPONIAMO $\Sigma = \varphi(U)$, $\varphi(x) = L \cdot x$ LINEARE

L MATRICE $K \times n$.

(1a) L ORTOGONALE, CIOÈ $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$

IN PART. L ISOMETRIA TRA $\mathbb{R}^K$ E $L(\mathbb{R}^K) < \mathbb{R}^n$

E SI HA $L^T \cdot L = Id_K$,

PONIAMO $\mathcal{H}^K(\Sigma) = |U|$

MISURA K-DIM. DI Σ

(1b) IN GENERALE POSSO SCRIVERE

$$L = L' \cdot S \qquad L' : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n \text{ ORTOGONALE}$$

$$\text{E } S : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

S SI PUÒ ANCHE SCEGLIERE SIMMETRICA

(TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE POLARE)

PONIAMO $\mathcal{H}^k(\Sigma) = |\det(S)| \cdot |U|$

OSS: NON DIPENDE DA S, INFATTI

$$\det(L^T \cdot L) = \det(S^T \underbrace{L'^T L'}_{Id_k} S) = (\det S)^2$$

POSSO QUINDI PORRE

$$\boxed{H^k(\Sigma) = \int_U \sqrt{\det(L^T \cdot L)}\, dx}$$

OSS: $L^T L \neq L \cdot L^T$ $\quad \det(L \cdot L^T) = 0$ SE $k < n$

$\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ $\qquad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

(2) $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^1$, $\operatorname{rk}(D\varphi) = K$

APPROSSIMANDO φ IN C^1,

$\varphi_n \xrightarrow[n]{} \varphi$ IN $C^1(U)$, φ_n LINEARE A TRATTI, E CONTINUA

POSSO DEFINIRE

$$H^k(\Sigma) = \lim_n H^k(\Sigma_n) = \lim_n \int_U \hat{J}_{\varphi_n}(x) = \int_U \hat{J}_\varphi(x)$$

DOVE ABBIAMO POSTO $\hat{J}_\varphi = \sqrt{\det\left(D\varphi^T \cdot D\varphi\right)}$.

3

$$\Sigma = \overline{\bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(U_i)} \qquad \varphi_i(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \emptyset \text{ SE } i \neq j$$

PONIAMO $$\mathcal{H}^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \hat{J}_{\varphi_i} \, dx$$

OSS: NON HO CHIESTO φ INIETTIVA, QUINDI OTTENGO IN QUESTO MODO LA k-MISURA DI Σ CON MOLTEPLICITÀ.

ESEMPIO:

- $k=1$ (CURVE)

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ $\qquad \hat{J}_\varphi = |\varphi'|$

$$L(\varphi) = \mathcal{H}^1(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'|$$

- $k=2,\ n=3$ $\qquad \varphi = (\varphi_1(x,y), \dots \varphi_3(x,y))$

$$D\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_{1x} & \varphi_{1y} \\ \varphi_{2x} & \varphi_{2y} \\ \varphi_{3x} & \varphi_{3y} \end{pmatrix}, \quad D\varphi^T \cdot D\varphi = \begin{pmatrix} |\varphi_x|^2 & \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle \\ \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle & |\varphi_y|^2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{J}_\varphi = \sqrt{|\varphi_x|^2 \cdot |\varphi_y|^2 - \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle^2} = |\varphi_x \wedge \varphi_y|$$

PROP (CAUCHY-BINET)

DATA $L: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ LINEARE, SI HA

$\det(L^T \cdot L)$ È LA SOMMA DEI QUADRATI DI TUTTI I MINORI DI RANGO K DI L

DOVE UN MINORE È IL DETERMINANTE DI UNA SOTTOMATRICE $K \times K$ DI L, OTTENUTA DA L CANCELLANDO $(n-K)$ RIGHE

OSS: $k = n-1$ $\qquad \varphi(x) = (x, f(x))$

con $f : V \to \mathbb{R}$, $\quad V \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$, $\quad f \in C^1(V)$

(GRAFICI)

$$D\varphi(x) = \begin{pmatrix} Id_{n-1} \\ \nabla f(x) \end{pmatrix} \qquad \hat{J}_\varphi = \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2}$$

$$\Sigma = \Gamma_f$$

$$H^{n-1}(\Gamma_f) = \int_V \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx$$

OSS: $H^k(\Sigma)$ NON DIP. DALLA PARAMETRIZZ. φ

$\varphi : U \to \Sigma$ $\quad \Phi : U \to V$ DIFFEO. C^1 IN $\mathbb{R}^k$

$\psi : V \to \Sigma$, $\quad \psi = \varphi \circ \Phi^{-1}$, $\quad \varphi = \psi \circ \Phi$, $\quad D\varphi = D\psi \cdot D\Phi$

$$H^k(\Sigma) = \int_U \hat{J}_\varphi = \int_U \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi)}$$

$$= \int_U \sqrt{\det D\Phi^T \cdot D\psi^T \cdot D\psi D\Phi} = \int_U J_\Phi \sqrt{\det D\psi^T D\psi}$$

$$= \int_{V = \Phi(U)} \sqrt{\det D\psi^T D\psi}$$

IN ANALOGIA A QUANTO FATTO PER LE CURVE DATA $\Sigma = \varphi(U)$ K-SUP. IN $\mathbb{R}^n$, CON φ INIETTIVA, E $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ CONTINUA, POSSIAMO DEFINIRE

$$\int_{\Sigma} f = \int_{U} \hat{J}_{\varphi} f(\varphi).$$

COME PER $\mathcal{H}^K(\Sigma)$ NON DIPENDE DALLA PARAM. φ

OSS: È SUFF. CHE $f \circ \varphi$ SIA INTEGRABILE IN $\mathbb{R}^K$

OSS: SE $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(U_i)$ POSSIAMO PRENDERE

FUNZIONI $\eta_i(x) : \Sigma \to [0,1]$ $i \in \{1, \dots N\}$

T.C. $\eta_i(x) = 0$ SE $x \notin \varphi_i(U_i)$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \eta_i(x) = 1 \qquad \forall x \in \Sigma}$$

TALI η_i SI CHIAMANO

UNA PARTIZIONE DELL'UNITÀ

$$H^k(\Sigma) = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \hat{J}_{\varphi_i} \, \eta_i(\varphi_i) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Sigma} \eta_i$$

PIÙ IN GENERALE

$$\int_{\Sigma} f = \sum_{i=1}^{N} \int_{\varphi(U_i)} f \cdot \eta_i = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} \hat{J}_{\varphi_i} f(\varphi_i)\, \eta_i(\varphi_i)$$

SI VERIFICA CHE QUESTE QUANTITÀ NON DIPENDONO DALLE SCELTE DI φ_i E η_i.

OSS: SE Σ È COMPATTA $\exists$ SEMPRE UN INSIEME FINITO DI CARTE $\varphi_i : B \to \Sigma$, $B \subseteq \mathbb{R}^k$, $i \in \{1, .. N\}$, T.C. $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} \varphi_i(B)$

OSS: $\exists$ UNA NOZIONE PIÙ INTRINSECA DI AREA ATTRAVERSO LA DEF. DI UNA "MISURA K-DIM." IN $\mathbb{R}^n$ DETTA MISURA DI HAUSDORFF (DI DIM. K).

LE DUE NOZIONI COINCIDONO PER K-SUP. DI CLASSE C^1.

FLUSSO DI CAMPI DI VETTORI

DATA $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-SUP. REGOLARE, COMPATTA

E ORIENTATA, CIOÈ È DEFINITA

UNA SCELTA $N(x) : \Sigma \to S^{n-1}$ CONTINUA

CON $N(x) \in T_\Sigma(x)^\perp$ VETTORE NORMALE,

E DATO $v : \Sigma \to \mathbb{R}^n$ CAMPO DI VETTORI CONTINUO,

LA QUANTITÀ $\int_\Sigma v \cdot N$ SI DICE **FLUSSO DI v** ATTRAVERSO Σ

OSS: $\Sigma = \partial U$ $\quad U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO,

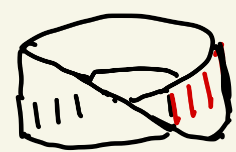
UNA SCELTA CANONICA DI N È LA NORMALE ESTERNA AD U

$$U = \{f < 0\}, \quad \Sigma = \{f = 0\}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^n) \text{ con } \nabla f\big|_{\Sigma} \neq 0$$

$$\Rightarrow N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$$

OSS: NON TUTTE LE Σ SONO ORIENTABILI

ES. NASTRO DI MÖBIUS



TEOREMA DELLA DIVERGENZA

$\Sigma = \partial U$ $(n-1)$-SUP. REGOLARE, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ APERTO LIMITATO,

$v : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ CAMPO DI VETTORI DI CLASSE C^1 $\Rightarrow$

$$\int_{\Sigma} v \cdot N = \int_{U} \operatorname{div} v(x)\, dx ,$$

DOVE $\quad \operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_i}$.

OSS: ASSOMIGLI AL TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

OSS: $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\overline{U} \subseteq A$, $f \in C^2(A)$

$$\underbrace{\int_U \Delta f}_{\text{LAPLACIANO DI } f} = \int_U \operatorname{div}(\nabla f) = \int_\Sigma \nabla f \cdot N = \int_\Sigma \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \nu}}_{\text{DERIVATA NORMALE DI } f}$$

DOVE $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla^2 f) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

ES: $\omega_n = |B_1(0)|$ $\qquad B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ PALLA UNITARIA

$U = B_1, \quad \Sigma = \partial B_1 = S^{n-1}$ SFERA UNITARIA

$v(x) = x, \quad \operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = n$

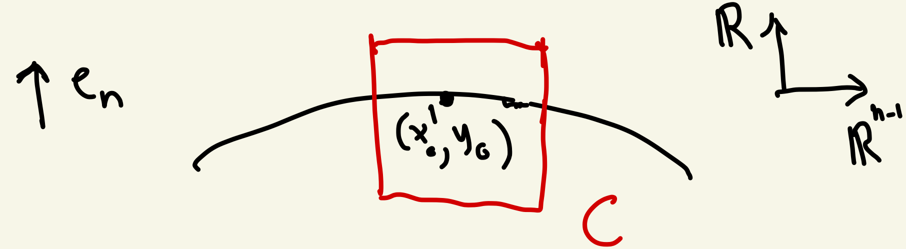
$$n\,\omega_n = \int_{B_1} \operatorname{div} v = \int_{\partial B_1} x \cdot N = H^{n-1}(\partial B_1)$$

$\Rightarrow$ x È LA NORMALE ESTERNA A $\partial B_1 \Rightarrow x \cdot N = 1$

E, PER RISCALAMENTO,

$$H^{n-1}(\partial B_R) = n\,\omega_n R^{n-1}.$$

DIMOSTRAZIONE:



$x = (x', y) \in \mathbb{R}^n$

① $(x'_0, y_0) \in \Sigma$

$x_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathbb{R}$

$C = B_r(x'_0) \times (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$, $B_r(x'_0) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$

SUPPONIAMO $\Sigma \cap C = \Gamma_f$ $\quad f : B_r(x'_0) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$

E $v(x) = u(x) \cdot e_n$ CON $\operatorname{supp} u \subseteq C$, $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_U \operatorname{div} v = \int_{C \cap U} \frac{\partial u}{\partial y} \underset{\text{TEO F.T.}}{=} \int_{B_r(x_0)} dx' \int_{y_0 - \varepsilon}^{f(x')} \frac{\partial u}{\partial y}\, dy \underset{\text{TEO FOND. CALCOLO}}{=} \int_{B_r(x_0)} u(x', f(x'))\, dx'$$

(2) $x_0 \in \Sigma$ SUPPONIAMO CHE ESISTA $R>0$ T.C.

$\forall i \quad B_R(x) \cap \Sigma \subseteq C_i$ CILINDRI CON ASSE LUNGO e_i,

DOVE $\Sigma \cap C_i$ È GRAFICO DI f_i NELLA DIR. e_i.

DATO v CON $\mathrm{supp}\, v \in B_R(x_0)$ SI HA

$$\int_U \mathrm{div}\, v = \sum_i \int_U \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_{C_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_i \int_\Sigma (v_i e_i) \cdot N = \int_\Sigma v \cdot N$$

PUNTO (1)

OSS: POSSO SCEGLIERE $B_R(x_0)$ COME SOPRA

$\iff N(x_0)$ NON È $/\!/$ AD e_i PER NESSUN i.

(3) DATO $x_0 \in \Sigma$ POSSO TROVARE $O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ORTOGONALE T.C. $O(N(x_0))$ NON È // AD e_i $\forall i$

$$\int_U \operatorname{div} v = \int_{O(U)} \operatorname{div}(O \cdot v) = \int_{O(\Sigma)} O \cdot v \cdot O \cdot N = \int_\Sigma v \cdot N$$

(4) IN GENERALE PRENDO UN RICOPRIMENTO FINITO

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^{N} B_R(x_i) \qquad x_i \in \partial\Sigma \qquad B_R(x_i) \text{ COME SOPRA}$$

E UNA PARTIZIONE DELL'UNITÀ $\eta_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 0, \dots N$

CON $\operatorname{supp} \eta_0 \subseteq U$, $\operatorname{supp} \eta_i \subseteq B_R(x_i)$, $\sum_{i=0}^{N} \eta_i(x) = 1$ $\forall x \in \overline{U}$

$$\operatorname{div}(v\cdot\eta_i) = \operatorname{div} v\cdot\eta_i + v\cdot\nabla\eta_i\,,$$

$$\sum_i \operatorname{div} v\eta_i = \operatorname{div} v\sum_i\eta_i + v\cdot\nabla\Big(\sum_i\eta_i\Big) = \operatorname{div} v\,,$$

$$\int_U \operatorname{div} v = \sum_{i=0}^{N}\int_U \operatorname{div}(v\cdot\eta_i) = \underbrace{\int_U \operatorname{div} v\eta_0}_{=0\ (*)} + \sum_{i=1}^{N}\int_{B_R(x_i)} \operatorname{div} v\cdot\eta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Sigma}(v\cdot N)\eta_i = \int_{\Sigma} v\cdot N\,.$$

PUNTO 3

(*) $w(x) = \begin{cases} v\cdot\eta_0 & x\in U\\ 0 & x\notin U\end{cases}$ $\qquad \int_U \operatorname{div} v\eta_0 = \int_{\mathbb{R}^n}\operatorname{div} w = \sum_i\int_{\mathbb{R}^{n-1}}dx'\int_{\mathbb{R}}\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\,dx_i = 0$

$$N(x) = \frac{(-\nabla f(x'),\ 1)}{\sqrt{1+|\nabla f(x')|^2}}$$

$$v \cdot N = \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1+|\nabla f'(x)|^2}}$$

$$\int_{\Sigma} v \cdot N = \int_{\Sigma \cap C} \frac{u(x', f(x'))}{\sqrt{1+|\nabla f(x)|^2}} = \int_{B_r(x_0)} \cancel{\hat{J}_\varphi(x')}\, \frac{u(x', f(x'))}{\cancel{\sqrt{1+|\nabla f(x')|^2}}}$$

$$\varphi : B_r(x_0) \to \Sigma \cap C \qquad \varphi(x') = (x', f(x'))$$

$$\hat{J}_\varphi = \sqrt{1+|\nabla f'(x')|^2}$$