Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 5)

Esercizio 1

Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ curve, definite da:

$$\gamma_1(t) := (e^{2t}, 2e^t, t);$$
$$\gamma_2(t) := (t, 2t^2, t-1).$$

Sia $P_0 := (1,2,0)$ e per ogni $i \in \{1,2\}$ si calcolino (se ben definiti):

a) la lunghezza di γ_i;

b) l'angolo formato tra γ_1 e γ_2 nel punto P_0;

c) i versori della terna intrinseca (o triedro di Frenet) $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ di γ_i in P_0;

d) curvatura e torsione di γ_i in P_0;

e) la componente normale e quella tangenziale dell'accelerazione di γ_i (ossia γ_i'') in P_0.

Esercizio 2

Sia $\gamma_{a,b,c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la curva definita da:

$$\gamma_{a,b,c}(t) := (a\cos(t), b\sin(t), ct),$$

con $a, b, c > 0$. Siano inoltre f e g funzioni reali a variabile in $\mathbb{R}^3$ definite da

$$f(x,y,z) := \frac{1}{x^2+y^2+z^2}, \qquad g(x,y,z) := \sqrt{a^2+b^2+c^2-x^2-y^2}$$

nei rispettivi domini massimali. Si determinino (se ben definiti):

(i) l'integrale di f sulla curva $\gamma_{a,a,c}$, ovvero

$$\int_{\gamma_{a,a,c}} f := \lim_{\alpha\to+\infty} \int_{\gamma_{a,a,c}|_{[-\alpha,+\alpha]}} f;$$

(ii) l'integrale di g sulla curva $\gamma_{a,b,c}|_{[0,1]}$;

(iii) curvatura e torsione di $\gamma_{a,b,c}$;

(iv) per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, le soluzioni del problema

$$\max_{c>0} |\tau_{\gamma_{a,a,c}}(t)|,$$

dove $\tau_{\gamma_{a,a,c}}(t)$ denota la torsione di $\gamma_{a,a,c}$ nel punto $\gamma_{a,a,c}(t)$;

(v) per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, l'angolo formato dalla retta tangente a $\gamma_{a,a,c}$ nel punto $\gamma_{a,a,c}(t)$ e la retta $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 3

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ una curva chiusa, regolare, di classe C^3. Si dimostri che

$$\int_a^b \Big(k'(t)\gamma(t) - \tau(t)|\gamma'(t)|\mathbf{B}(t) \Big) \mathrm{d}t = 0,$$

dove $k(t)$ denota la curvatura, $\tau(t)$ la torsione e $\mathbf{B}(t)$ il versore binormale relativi a γ nel punto $\gamma(t)$.

Esercizio 4

Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = \frac{xz^2}{(x^2+2y^2)^2}\mathrm{d}x + \frac{2yz^2}{(x^2+2y^2)^2}\mathrm{d}y - \frac{z}{x^2+2y^2}\mathrm{d}z.$$

Determinare l'insieme di definizione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di ω e stabilire se è ivi chiusa. Stabilire inoltre se ω è esatta in Ω e in tal caso determinarne le primitive. Calcolare l'integrale di ω lungo la curva $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (t, 1, \sin(\pi t/4))$.

Esercizio 5

Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y,z) = \frac{z}{z^2+(x+y)^2}\mathrm{d}x + \frac{z}{z^2+(x+y)^2}\mathrm{d}y - \frac{x+y}{z^2+(x+y)^2}\mathrm{d}z.$$

Determinare l'insieme di definizione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ di ω e stabilire se è ivi chiusa. Stabilire inoltre se ω è esatta in Ω e in tal caso determinarne le primitive.

Esercizio 6

Siano n un intero strettamente positivo e ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(|x|) \mathrm{d}x_i.$$

Determinare l'insieme di definizione $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ di ω e stabilire se è ivi chiusa. Stabilire inoltre se ω è esatta in Ω e in tal caso determinarne le primitive.