ESERCIZIO 10

$$p: S^1 \longrightarrow S^1 \qquad p(z) = z^5$$

Si trovi un'azione di un gruppo G tale che p è il quoziente di S^1 per l'azione di questo gruppo.

$$G = \mathbb{Z}/5 \cong \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\} \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

$G \ni \lambda$ e $z \in S^1$ $\qquad \lambda \bullet z = \lambda z$

> l'azione è libera se $\lambda z = z \Rightarrow \lambda = 1$

> l'azione è propriamente discontinua.

$\forall z \in S^1$ $\exists$ U int. di z e se $\gamma \in G$ e $\gamma \neq id$

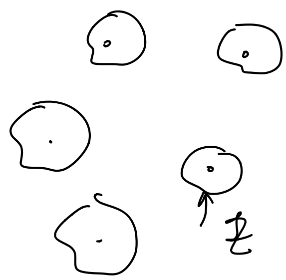
allora $U \cap \gamma(U) = \emptyset$

Sia $z \in S^1$ e siano U_1 U_2 U_3 U_4 U_5

intorni di z αz $\alpha^2 z$ $\alpha^3 z$ $\alpha^4 z$

disgiunti. Poniamo U

$$U = U_1 \cap \alpha^{-1} U_2 \cap \alpha^{-2} U_3 \cap \dots \cap \alpha^{-4} U_5$$



U è un intorno di z.

$U \cap \alpha U \subset U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

in particolare il quoziente $\underline{\pi: S^1 \longrightarrow S^1/G}$ è un rivestimento.

> la mappa p proposta dall'esercizio è il quoziente.

1ª oss A livello insiemistico è

il quoziente: $p(z) = p(w) \iff$

$\exists \lambda \in G : \quad z = \lambda \cdot w$

$$z^5 = w^5 \Rightarrow z = \lambda w \quad \lambda \in G.$$

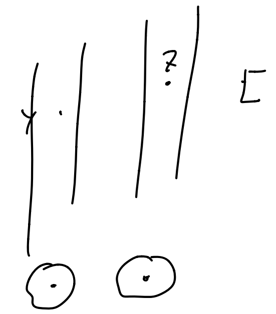
2° oss p è continua.

3° oss p è chiusa perché S^1 è compatto e T_2

$Z \subset S^1$ chiuso $\Rightarrow$ Z è compatto $\Rightarrow$ $p(Z)$ è compatto $\Rightarrow$ Z è chiuso.

ESERCIZIO 12

Sia $p: E \longrightarrow X$ un rivestimento.



1) Se X è T_2 allora E è T_2

Siano $y, w \in E$ $\quad y \neq w$

Considero $p(y)$ e $p(w)$

Se $p(y) \neq p(w)$ $\quad \exists$ U int. di $p(y)$, W int di $p(w)$ $\quad U \cap W = \emptyset$

$p^{-1}(U) \cap p^{-1}(W) = \emptyset$ e

$p^{-1}(U)$ int. di y, $\quad p^{-1}(W)$ è int di z.

Se $p(y) = p(w) = x$.

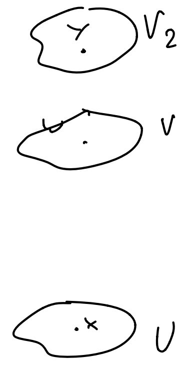
Sia U un int. di x ben rivestito

$$p^{-1}(U) \simeq \coprod V_i \quad \text{con} \quad p|_{V_i} : V_i \xrightarrow{\sim} U$$

y e w non possono appartenere allo stesso V_i
($y \neq w$ e $p(y) = p(w)$)

$y \in V_i \quad w \in V_j \quad V_i \neq V_j$

quindi V_i è un int. di y
V_j " " " w e $V_i \cap V_j = \emptyset$



2) Se p ha grado finito e X è compatto allora E è compatto. //

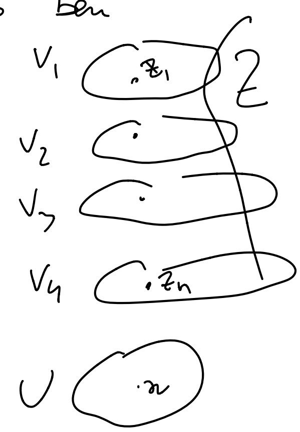
$\rightarrow$ p è chiusa e $p^{-1}(x)$ è compatto.
Quindi p è chiusa con fibre compatte $\Rightarrow$
quindi è propria $\Rightarrow$ $p^{-1}(X) = E$ è compatto.

ESERCIZIO 11

1) p un rivestimento di grado finito $\Rightarrow$ p è chiusa.

$p: E \longrightarrow X$ $Z \subset E$ un chiuso e
vogliamo dimostrare che $\underline{p(Z)}$ è chiuso.

Sia $x \notin p(Z)$ e sia U un intorno ben rivestito di x.



$$p^{-1}(U) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_n$$

con $p|_{V_i}: V_i \xrightarrow{\sim} U$

$p^{-1}(x) = \{z_1, \dots, z_n\} = F$ $z_i \in V_i$

$F \cap Z = \emptyset \qquad x \notin p(Z)$

$W_i = V_i \setminus Z \qquad W_i$ è un di Z_i.

e $\quad p(W_i) \subset U \quad$ è un intorno di X.

$\underline{U \supset U' = p(W_1) \cap \dots \cap p(W_n)}$ è un intorno di X

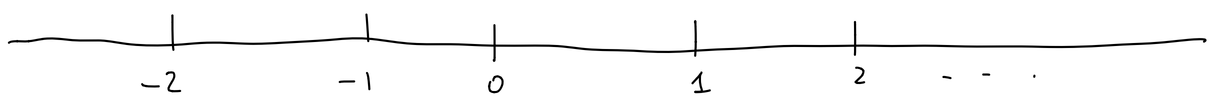
$p^{-1}(U') \cap V_1 \subset W_1 \qquad p^{-1}(U') \cap V_1 \cap Z = \emptyset$.

$U' \cap p(Z) = \emptyset$. #

2) Si consideri

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \qquad p(t) = e^{2\pi i t}$$

p non è chiusa.



Se $\boxed{Z = \{ n + \frac{1}{n} : n \geq 2 \}} \subset \mathbb{R}$ è chiuso.

$$p(Z) = e^{2\pi i n + 2\pi i \frac{1}{n}} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \longrightarrow 1$$

$$\Uparrow$$

$$p(Z)$$

$Z \cap \mathbb{Z} = \emptyset \qquad 1 \notin p(Z)$ #.

ESERCIZIO 12 punto 2) o

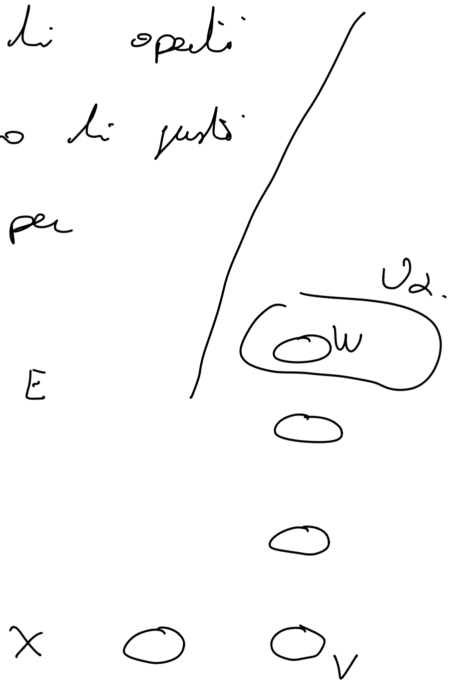
$p : E \to X$ di grado finito con X compatto.

VOGLIO DIMOSTRARE E COMPATTO

SENZA USARE CHIUSA + FIBRE COMPATTE $\Rightarrow$ PROPRIA.

U_α ricoprimento di E

- $\exists$ un ricoprimento finito di X fatto di aperti ben rivestiti tale che se V è uno di questi aperti e $p^{-1}(V) = \underline{W_1} \sqcup \dots \sqcup W_n$ per ogni i $\exists\, \alpha$: $W_i \subset U_\alpha$



QUESTO IMPLICA LA TESI

Chiamo $\underline{V_1 \dots V_N}$ questi aperti

$$W_{1,i} \sqcup \dots \sqcup W_{n,i} = p^{-1}(V_i)$$

$\underline{W_{i,j}}$ sono un ricoprimento finito di X.

e sono degli U_α. $\quad W_{i,j} \subset U_{\alpha_{i,j}}$

$$\bigcup U_{\alpha_{i,j}} = E$$

COSTRUZIONE DEGLI APERTI

$x \in E \qquad y = p(x)$

$$\begin{array}{ccccc} p^{-1}(y) = & x = x_1 & \dots & x_n \\ & \cap & & \cap \\ & \underline{U_{\alpha_1}} & & \underline{U_{\alpha_n}} \end{array}$$

Sia V intorno ben rivestito di y. $\qquad V$

$p^{-1}(V) = \tilde{V}_1 \sqcup \dots \sqcup \tilde{V}_n$ Restringo V:

$$V' = \underbrace{p(\tilde{V}_1 \cap U_{\alpha_1})}_{\substack{\Downarrow \\ x_1}} \cap \dots \cap \underbrace{p(\tilde{V}_n \cap U_{\alpha_n})}_{\substack{\Downarrow \\ x_n}} =$$

è l'aperto di $\underline{p(y)}$ che mi interessa.

ORA USO LA COMPATTEZZA DI X PER ESTRARNE UN NUMERO FINITO.

APPLICAZIONI DI $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$

TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI BROUWER

Sia $f : D^2 \longrightarrow D^2$ continua

$$D^2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1 \}$$

Allora $\exists\, x \in D^2 : f(x) = x$.

LEMMA $\nexists\, r : D^2 \longrightarrow S^1$ retrazione.

(r continua e $r(x) = x \quad \forall x \in S^1$).

dim Se r è una retrazione, abbiamo visto che

$$\pi_1(i) : \underset{\mathbb{Z}}{\pi_1(S^1)} \longrightarrow \underset{0}{\pi_1(D^2)} \longrightarrow$$

è iniettiva.

$$\pi_1(r) \circ \pi_1(i) : \pi_1(S^1) \longrightarrow \pi_1(S^1)$$

$$\| $$

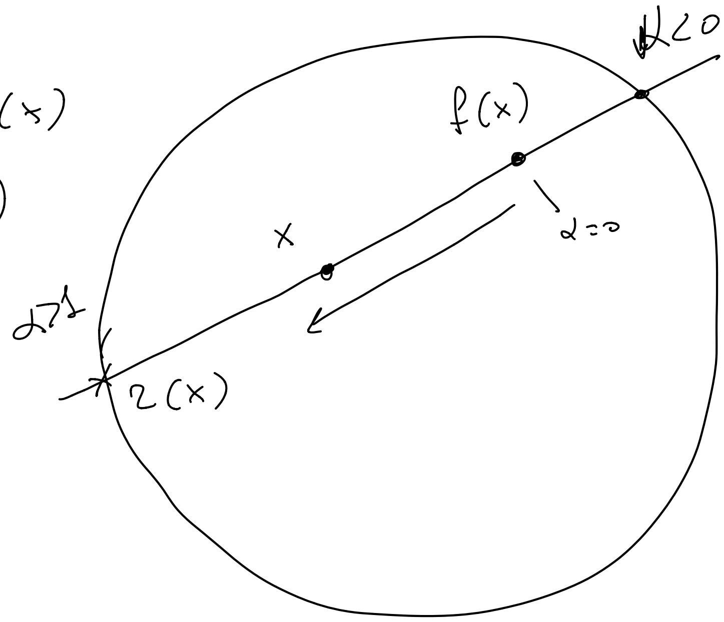
$$\pi_1(r \circ i) = \mathrm{Id}.$$

ricordo $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ $\quad \pi_1(D^2) = \{0\} = \{e\}$

#

dim del teorema di Brouwer

p.a. Sia $f: D^2 \to D^2$ senza punti fissi. Costruisco $r: D^2 \to S^1$ retrazione.



Sia
$$r(x) = \alpha x + (1-\alpha) f(x) = f(x) + \alpha(x - f(x))$$
con $\alpha \geq 1$ e $r(x) \in S^1$.

Voglio dimostrare che r è continua. $\quad y = f(x)$

$$\|y + \alpha(x-y)\|^2 = 1$$

$$\|y\|^2 + 2\alpha (x-y)\cdot y + \underline{\underline{\alpha^2}} \|x-y\|^2 = 1$$

$y = f(x)$ $\quad \alpha^2 \underset{\neq 0}{\|x-y\|^2} + 2\alpha (x-y)\cdot y + \|y\|^2 - 1 = 0$

$$\Delta(x) = \ldots \ldots > 0.$$

espressione continua in x.

$$\alpha(x) = \frac{-2(x-y)\cdot y + \sqrt{\Delta(x)}}{2\|x-y\|^2}$$

$< \|x-y\|$

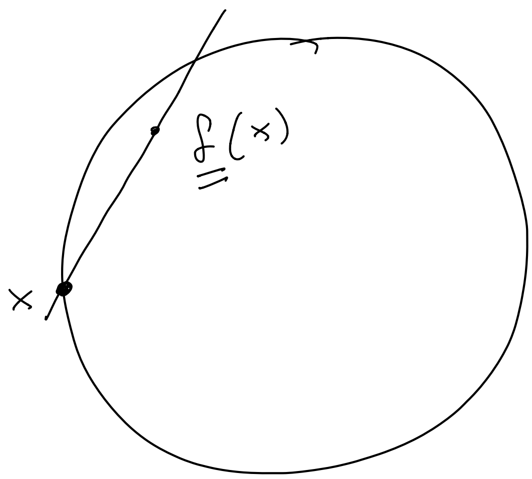
$\alpha(x)$ è una espressione continua in x. $y = f(x) \neq x$.

$$r(x) = f(x) + \alpha(x)\,\big(x - f(x)\big) \quad \text{è continua in } x.$$

$r : D^2 \to S^1$ continua

e se $x \in S^1$

$r(x) = x$.



Per il lemma ho trovato un assurdo.

#

2ª APPLICAZIONE

TEOREMA DI BORSUK-ULAM

$f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ continua allora

$\exists\, x \in S^2 : f(x) = f(-x)$.

Esempio

$f :$ Superficie Terrestre $\to \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \big(\text{Temperatura}(x),\ \text{Pressione}(x)\big)$$

Per il teorema ci solo due posti agli antipodi che hanno stessa temperatura e stessa pressione

LEMMA Se $g : S^2 \longrightarrow S^1$ è continua
$\exists\, x : \quad g(-x) \neq -g(x)$.

dimostriamo che il lemma implica il teorema

p.a. $f : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(-x) \neq f(x) \ \forall x$.

e definiamo $$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{\| f(x) - f(-x) \|}$$

g è continua perché $f(x) - f(-x) \neq 0 \ \forall x$.

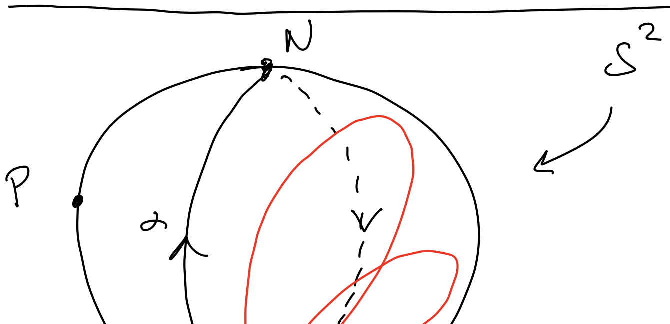
$$g : S^2 \longrightarrow S^1$$

$$g(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{\| f(-x) - f(x) \|} = -g(x).$$

contro il lemma

#

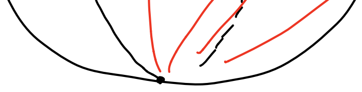
Dimostriamo il lemma



$\alpha : I \longrightarrow S^2$

$\alpha(0) = S \quad \alpha(1) = N$

percorre un meridiano.



S

e sia $\beta : I \longrightarrow S^2$

$\beta(t) = -\alpha(t)$

$\beta(0) = N \qquad \beta(1) = S.$

$\gamma = \alpha * \beta : I \longrightarrow S^2$

$\gamma(0) = \gamma(1) = S.$

$\gamma \sim 1_S \qquad$ γ è omotopo al cammino costante.

$[\gamma] = 1 \in \pi_1(S^2, s)$

Osserviamo $\quad S^2 \setminus P \simeq \mathbb{R}^2$

γ definisce un elemento in $\underline{\pi_1(\mathbb{R}^2, s)}$ = banale

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 \overset{j}{\subset} S^2 \qquad j \circ \gamma = \gamma.$

ovvero se $[\gamma]$ è banale in $\pi_1(\mathbb{R}^2, s)$

allora $[\gamma]$ è banale in $\pi_1(S^2, s)$

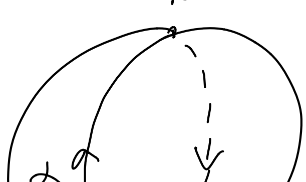
P.A. supponiamo che esista $g : S^2 \to S^1$ con $g(-x) = -g(x)$.

Consideriamo $\quad g \circ \gamma = (g \circ \alpha) * (g \circ \beta)$

$g : S^2 \longrightarrow S^1 \qquad \gamma \sim 1_S$

$\underline{g} \circ \gamma \sim 1_{g(s)}$

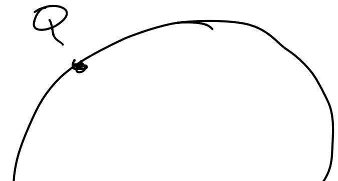
N



$P = g(s)$

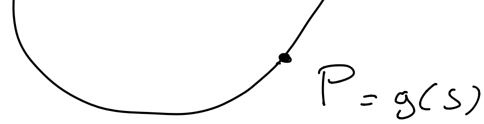
$Q = g(N)$

$Q \quad g(N)$



$P = -Q$

$$\boxed{g(-x) = -g(x)}$$



$g \circ \alpha$ è un cammino che va da P a Q.
$g \circ \beta$ " " " Q a P.

$$\beta(t) = -\alpha(t)$$

$$g \circ \beta = g(\beta(t)) = \underline{g(-\alpha(t))} = -g(\alpha(t))$$

$$g \circ \beta\,(t) = -\,g \circ \alpha\,(t)$$

Considera $p : S^1 \longrightarrow S^1$, $p(z) = z^2$
è un rivestimento di grado 2.

$$\delta = p \circ g \circ \alpha$$

$$\delta = p \circ g \circ \beta\,(t) = p\big(g(\beta(t))\big) = p\big(-g(\alpha(t))\big) = p\big(g(\alpha(t))\big)$$

$$\boxed{p \circ g \circ \gamma}$$

quindi $\delta = p \circ g \circ \alpha = p \circ g \circ \beta$
e $\underline{p \circ g \circ \gamma} = \underline{\delta * \delta}$.

Poiché $\gamma \sim 1_S$ abbiamo che $\delta * \delta \sim 1_{p(g(S))}$

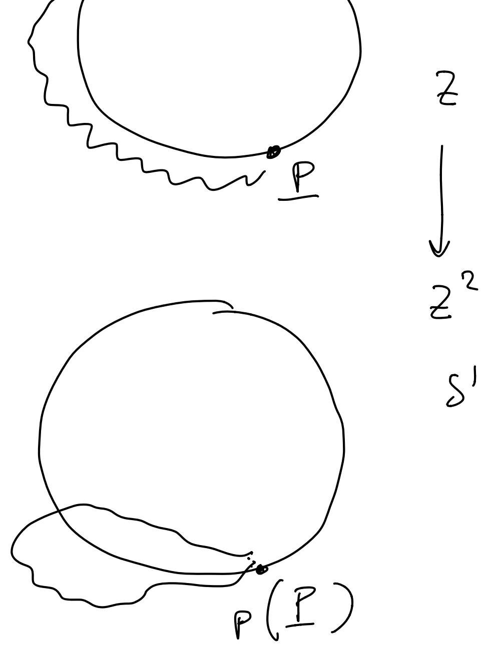
Ma $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ quindi se $\delta * \delta \sim 1$

$2x = 0$.

onde $\delta \sim 1$

Quindi $\delta \sim 1$. $\boxed{g \circ \alpha}$

$\underline{g \circ \alpha}$ è un cammino che unisce P con $-P$



$\underline{p \circ g \circ \alpha}$ è un cammino ~ 1

$g \circ \alpha$ è un sollevamento di $p \circ g \circ \alpha$.

In particolare, poiché $p \circ g \circ \alpha \sim 1$, allora $g \circ \alpha$ va da $\underline{P}$ in $\underline{P}$, ma $g \circ \alpha$ va da P in Q

#