TEOREMA DI VAN KAMPEN

X SPAZIO TOP. CONN. PER ARCHI x_0

$\pi_1(X, x_0)$

SIA $X = A \cup B$ CON A E B APERTI

$x_0 \in A \cap B$

POSSIAMO RICOSTRUIRE $\pi_1(X, x_0)$ A PARTIRE DA $\pi_1(A, x_0)$ E $\pi_1(B, x_0)$

<u>TEOREMA</u> SUPPONIAMO INOLTRE CHE

$A, B, A\cap B$ SIANO CONNESSI PER ARCHI.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "(j_A)_*"] \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[r, "(j_B)_*"'] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

$i_A : A \cap B \longrightarrow A$

$j_A : A \longrightarrow X$

$j_A \circ i_A = j_B \circ i_B =$ inclusione di $A \cap B$ in X

$\forall\ \phi_A : \pi_1(A, x_0) \longrightarrow G \quad \phi_B : \pi_1(B, x_0) \longrightarrow G$ morfismi di gruppi

tali che $\boxed{\phi_A \circ (i_A)_* = \phi_B \circ (i_B)_*}$ esiste un unico $\varphi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$

$$\begin{tikzcd}
\underline{\pi_1(A\cap B, x_0)} \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "(j_A)_*"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_A"] & \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[r, "(j_B)_*"'] \arrow[drr, bend right] & \boxed{\pi_1(X, x_0)} \arrow[dr, dashed, "\varphi"] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

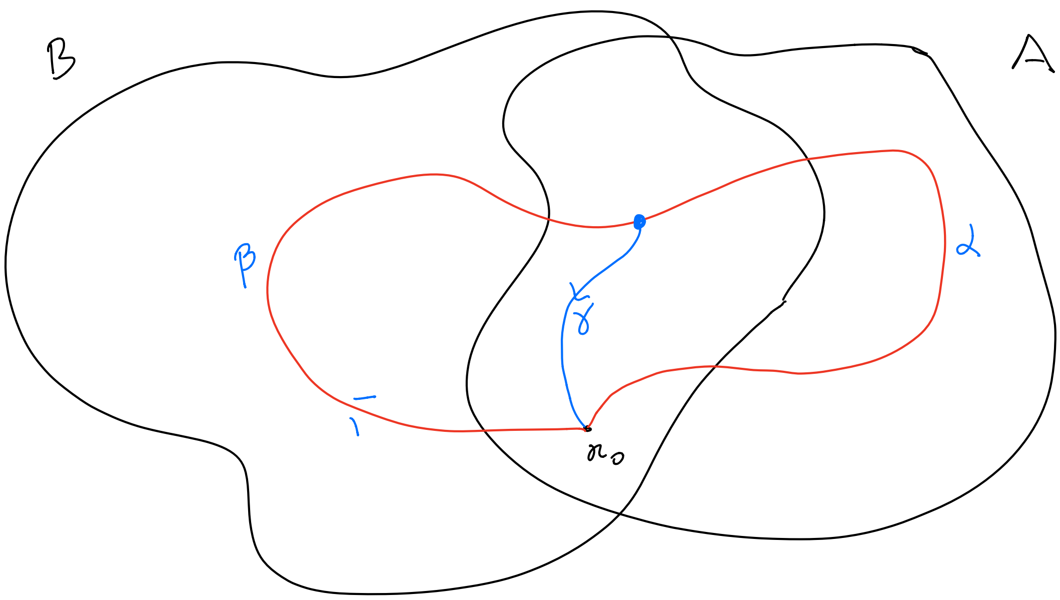
ϕ_A

tale che $\qquad \phi_A = \psi \circ (j_A)_*$

$\qquad\qquad\qquad \phi_B = \psi \circ (j_B)_*$

dim del teorema

1° PASSO: DIMOSTRO CHE ψ È UNICO E DIMOSTRO ANCHE CHE $\pi_1(X, x_0)$ È GENERATO DALL'IMMAGINE DEL $\pi_1(A, x_0)$ E DI $\pi_1(B, x_0)$.



$$\beta * \alpha \simeq \underbrace{\beta * \gamma}_{\in\, \pi_1(B, x_0)} * \underbrace{\gamma^{-1} * \alpha}_{\in\, \pi_1(A, x_0)}.$$

$\forall x \in X$ fisso un cammino γ_x che collega x con x_0 in questo modo

se $x \in A \cap B$ richiedo che $\gamma_x : I \longrightarrow A \cap B$

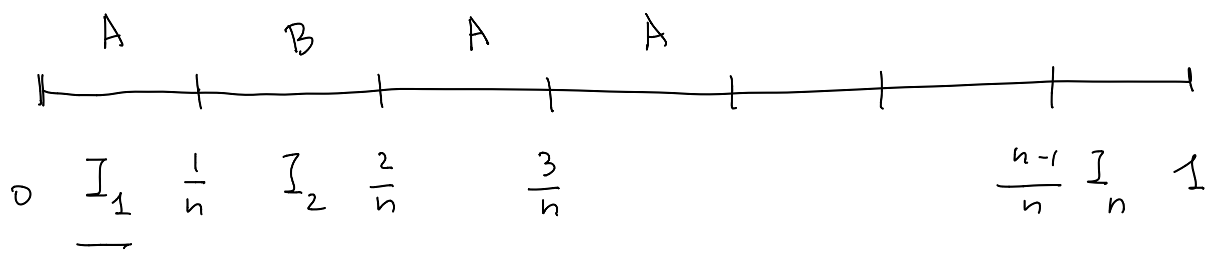
(RICORDO $A \cap B$ CONNESSO PER ARCHI)

se $x \in A$ scelgo le $\gamma_x : I \longrightarrow A$ (A conn. p.a.)

se $x \in B$ " " $\gamma_x : I \longrightarrow B$ (B conn. p.a.)

Sia ora $\underline{\underline{\delta : I \longrightarrow X}}$ un cammino da x_0 in x_0.

Se consideriamo $\delta^{-1}(A)$ e $\delta^{-1}(B)$ sono due aperti che ricoprono I. Quindi esiste un qualche numero $\underset{\sim}{\varepsilon > 0}$ tale che ogni intervallo di lunghezza ε è contenuto in $\delta^{-1}(A)$ o $\delta^{-1}(B)$



SE DIVIDO I in n parti con $\frac{1}{n} < \varepsilon$

avrò che $\forall m \quad I_m \subset \delta^{-1}(A)$ o $I_m \subset \delta^{-1}(B)$.

$$\delta \sim \delta_1 * \delta_2 * \dots * \delta_n$$

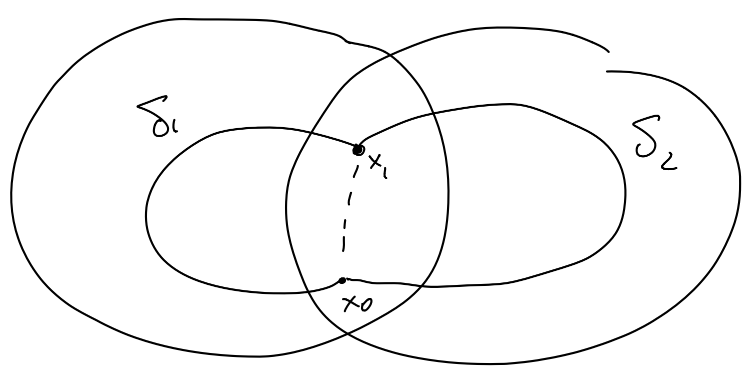
dove δ_i è la restrizione di δ a I_i.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend left, "\delta_i"] & I_i \arrow[r, "\delta"] & X \end{tikzcd}$$

$$0 \longrightarrow i/n$$

$$1 \longrightarrow i+1/n$$

più precisamente δ_i è questo.



Sia $x_i = \delta\left(\frac{i}{n}\right)$ $i = 1 \dots n$. $x_n = x_0$.

$$\delta \sim \underbrace{\delta_1 * \gamma_{x_1}} * \underbrace{\gamma^{-1}_{x_1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}} * \underbrace{\gamma^{-1}_{x_2} * \delta_3 * \gamma_{x_3}} * \dots * \underbrace{\delta_n}$$

Dimostro che $\gamma^{-1}_{x_{i-1}} * \delta_i * \gamma_{x_i}$ è un cammino a valori in A o in B.

Suppongo che $I_i \subset \delta^{-1}(A)$ ovvero δ_i sia a valori in A $(\delta_i : I \longrightarrow A)$.

in particolare $\underset{\underset{\delta_i(0)}{\shortparallel}}{x_{i-1}}$ e $\underset{\underset{\delta_i(1)}{\shortparallel}}{x_i}$ sono in A.

E QUINDI (PER EFFETTO DELLE NOSTRE SCELTE) ANCHE $\gamma_{x_{i-1}}$ E γ_{x_i} SONO A VALORI IN A.

E QUINDI $\gamma^{-1}_{x_{i-1}} * \delta_i * \gamma_{x_i}$ È A VALORI IN A.

quindi $\delta \sim g_1 * g_2 * \dots * g_n$

dove g_i è un cammino a valori o in A o in B.

IN PARTICOLARE OGNI ELEMENTO IN $\pi_1(X, x_0)$ SI SCRIVE COME PRODOTTO DI ELEMENTI

NELL'IMMAGINE DI $\pi_1(A, x_0)$ E DI $\pi_1(B, x_0)$.

IN PARTICOLARE SE $[\delta] \in \pi_1(X, x_0)$

$\delta \sim g_1 * \cdots * g_n$ COME SOPRA.

$$\Psi([\delta]) = \underline{\underline{\Psi([g_1])}} \cdot \underline{\underline{\Psi([g_2])}} \cdots \cdot \underline{\underline{\Psi([g_n])}}$$

Se g_1 è a valori in A $\Psi([j_A \circ g_1]) = \phi_A([g_1])$

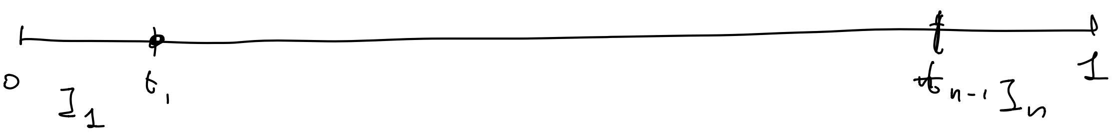
IL VALORE $\Psi([g_i]) = \begin{cases} \phi_A([g_i]) & \text{se } g_i \text{ è a valori in } A \\ \phi_B([g_i]) & \text{se } g_i \text{ è a valori in } B. \end{cases}$

2° PASSO ESISTENZA DI Ψ.

DEFINISCO Ψ NEL SEGUENTE MODO

$\delta : I \to X$ $\quad \delta(0) = \delta(1) = x_0$.

SPEZZO I in n parti (anche non uguali)



in modo che $\delta_i = \delta|_{I_i}$ sia a valori in A o in B. e sia C_i quello che ho scelto

Pongo $x_i = \delta(t_i)$

$C_i = A$ se δ_i è a valori in A

$C_i = B$ se δ_i " " " B.

$$\Psi(\underline{[\delta]}) := \phi_{C_1}(\delta_1 * \gamma_{x_1})\ \phi_{C_2}(\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}) \cdots$$

- VOGLIO DIMOSTRARE CHE Ψ È BEN DEFINITA.

1 > Ψ non dipende da come lo scelto A o B.

Se δ_i è a valori in $A \cap B$.

posso scegliere indifferentemente A o B.

2 > Ψ NON DIPENDE DA COME HO DIVISO L'INTERVALLO I.

3 > Ψ NON DIPENDE DAL RAPPRESENTANTE δ DI $[\delta]$.

(1) Se δ_i è a valori in $A \cap B$

Allora $\varepsilon = \gamma_{x_{i-1}}^{-1} * \delta_i * \gamma_{x_i}$ è a valori in $A \cap B$.

$$i_A \circ \varepsilon \qquad\qquad i_B \circ \varepsilon$$

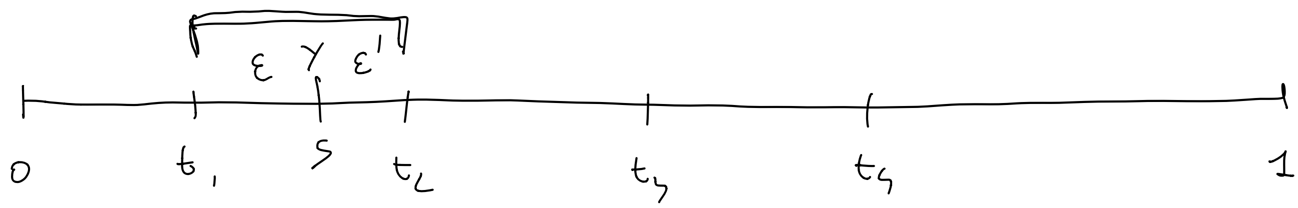
$$\underline{\phi_A} \circ (i_A)_* = \underline{\phi_B} \circ (i_B)_*$$

È NELLE IPOTESI DEL TEOREMA

$$\underline{\phi_A}([i_A \circ \varepsilon]) = \underline{\phi_B}([i_B \circ \varepsilon])$$

(2) Per vedere che non dipende dalla scelta di $t_1, \dots t_n$, basta far vedere che ottengo lo stesso risultato quando una è il raffinamento dell'altra. ANZI BASTA FAR VEDERE CHE OTTENGO LO STESSO RISULTATO

QUANDO DIVIDO IN DUE UN SINGOLO INTERVALLINO



$$\delta = \underbrace{\delta_1 * \gamma_{x_1}} * \boxed{\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}} * \underbrace{\gamma_{x_2}^{-1} * \delta_3 * \gamma_{x_3}} * \dots$$

se uso la suddivisione più fine l'unico pezzo che cambia

$$\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2} =$$

A
↓

$$\delta_2 = \varepsilon * \varepsilon' \qquad y = \delta(s)$$

$$\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2} \sim \underbrace{\gamma_{x_1}^{-1} * \varepsilon * \gamma_y} * \underbrace{\gamma_y^{-1} * \varepsilon' * \delta_{x_2}}$$

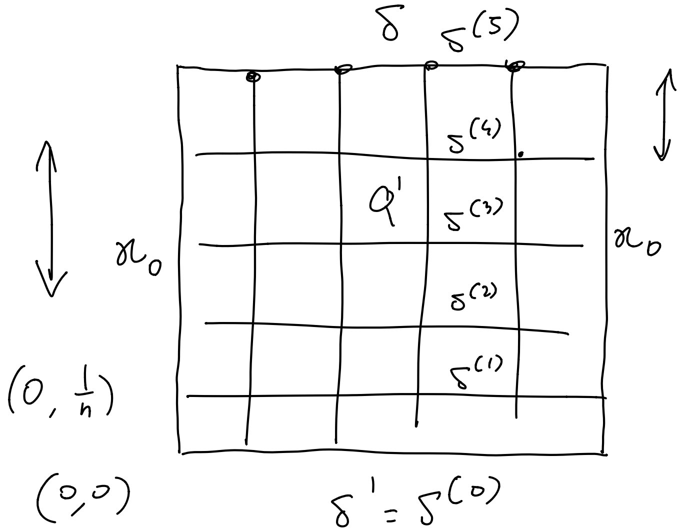
$$\phi_A\left([\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}]\right) = \phi_A\left([\gamma_{x_1}^{-1} * \varepsilon * \gamma_y]\right) \cdot \phi_A\left([\gamma_y^{-1} * \varepsilon' * \gamma_{x_2}]\right)$$

3° Ψ NON DIPENDE DALLA SCELTA DI δ

Siano δ e δ' DUE CAMMINI DA x_0 IN x_0

CON $\delta \sim \delta'$ VOGLIO MOSTRARE $\Psi([\delta]) = \Psi([\delta'])$

Sia H l'omotopia $H : I \times I \longrightarrow X$



PER IL TEOREMA DEL NUMERO DI LEBESGUE ESISTE n tale che SE DIVIDO I^2 in n^2 QUADRATINI UGUALI ALLORA PER OGNI QUADRATINO Q'

$H(Q') \subset A$ o $H(Q') \subset B$.

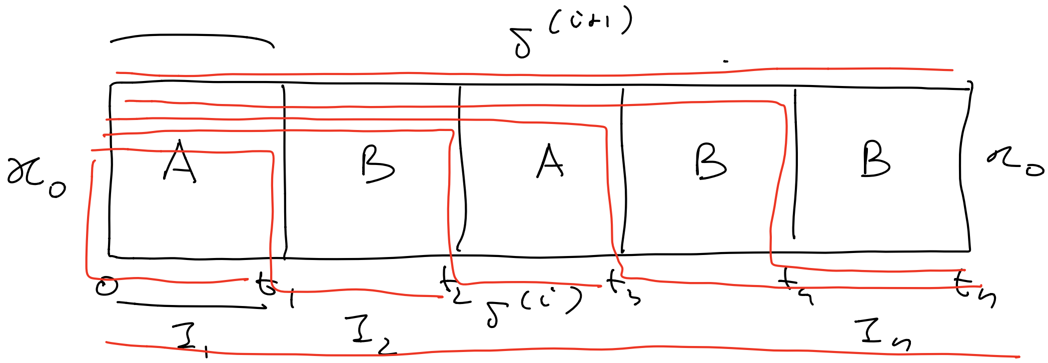
$H_1 = \delta \qquad H_0 = \delta'$

$H_{\frac{i}{n}} = \delta^{(i)}$

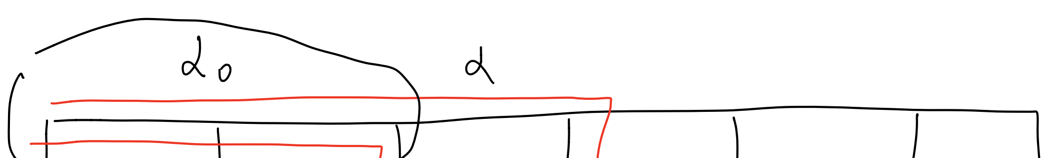
Dimostro $\Psi([\delta^{(i)}]) = \Psi([\delta^{(i+1)}])$

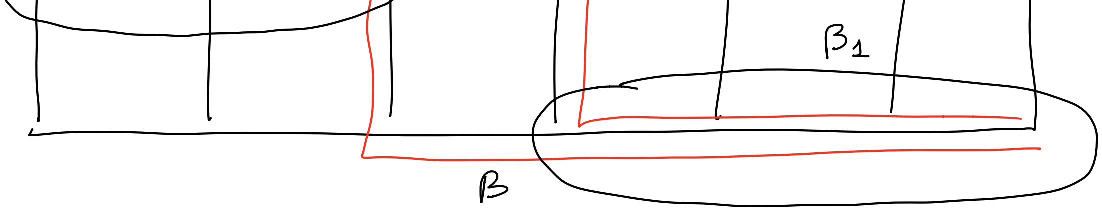
QUESTO IMPLICA $\Psi([\delta]) = \Psi([\delta'])$.

CI RIDUCIAMO AL CASO DI DUE CAMMINI $\delta^{(i)}$ e $\delta^{(i+1)}$ H una omotopia tra $\delta^{(i)}$ e $\delta^{(i+1)}$



e $\forall$ $H(I_j \times I) \subset A$ o è contenuto in B.

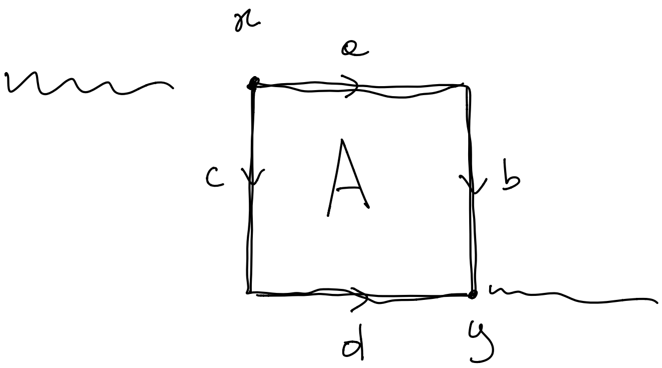




IL PASSO FONDAMENTALE È QUINDI DIMOSTRARE CHE $\Psi([\alpha]) = \Psi([\beta])$ DOVE α e β SONO DUE CAMMINI COME IN FIGURA

$$\alpha \sim \alpha_0 * a * b * \beta_1$$

$$\beta \sim \alpha_0 * c * d * \beta_1$$



$$\Psi([\alpha]) = \Psi([\alpha_0 * \gamma_x])\,\boxed{\Psi([\gamma_x^{-1} * a * b * \gamma_y])}\,\Psi([\gamma_y^{-1} * \beta_1])$$

$$\Psi([\beta]) = \Psi([\alpha_0 * \gamma_x])\,\boxed{\Psi([\gamma_x^{-1} * c * d * \gamma_y])}\,\Psi([\gamma_y^{-1} * \beta_1])$$

DEVO DIMOSTRARE

$$\overline{\Psi([\underbrace{\gamma_x^{-1} * a * b}_{H} * \gamma_y])} = \Psi([\gamma_x^{-1} * c * d * \gamma_y])$$

SUPPONIAMO CHE γ SUL QUADRATINO SIA A VALORI IN A. ALLORA

$\gamma_x^{-1} * a * b * \gamma_y$ e $\gamma_x^{-1} * c * d * \gamma_y$

SONO DUE CAMMINI A VALORI IN A OMOTOPI (SEMPRE PER IL LEMMETTO DI 2 SETTIMANE FA).

$$\phi_A\Big(\underbrace{[\gamma_x^{-1} * a * b * \gamma_y]}_{\in\, \pi_1(A, x_0)}\Big) = \phi_A\Big(\underbrace{[\gamma_x^{-1} * c * d * \gamma_y]}_{\in\, \pi_1(A, x_0)}\Big)$$

#

DEVO ANCORA VERIFICARE

1) ψ È UN MORFISMO DI GRUPPI

2) $\psi \circ (j_A)_* = \phi_A \qquad \psi \circ (j_B)_* = \phi_B$.

INIZIO LEZIONE 18 MARZO:

$X = A \cup B \qquad A, B, A\cap B$ conn per archi $\qquad A, B$ aperti

$x_0 \in A \cap B$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(A\cap B, x_0) \arrow[r, "(i_A)_*"] \arrow[d, "(i_B)_*"'] & \pi_1(A, x_0) \arrow[d, "(j_A)_*"] \arrow[ddr, bend left, "\phi_A"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \\
\pi_1(B, x_0) \arrow[r, "(j_B)_*"'] \arrow[drr, bend right, "\phi_B"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "\circlearrowright"] & \pi_1(X, x_0) \arrow[dr, dashed, "\psi"] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

TALI CHE $\phi_A \circ (i_A)_* = \phi_B \circ (i_B)_*$

ALLORA $\exists_1 \ \psi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ TALE CHE

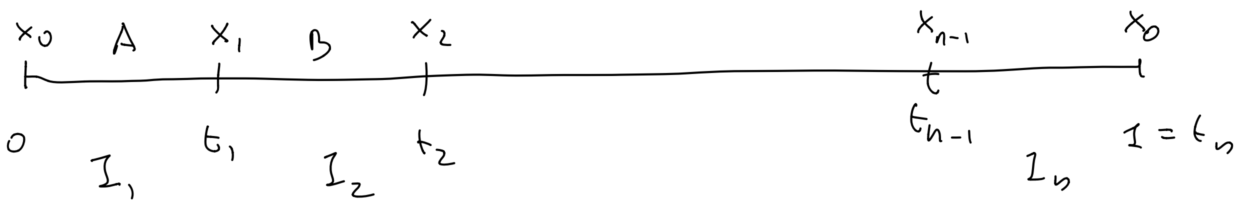
$$\psi \circ (j_A)_* = \phi_A \qquad \psi \circ (j_B)_* = \phi_B .$$

AVEVAMO DEFINITO ψ

Se $g \in \pi_1(X, x_0)$

$g = [\delta]$ $\quad \delta$ cammino

SCEGLIAMO



$$\delta = \underbrace{\delta_1 * \gamma_{x_1}} * \underbrace{\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}} \cdots\cdots * \gamma_{x_{n-1}}^{-1} * \delta_n$$

dove δ_i è la restrizione di δ a I_i

e $x_i = \delta(t_i)$

e γ_{x_i} è un cammino da x_i a x_0.

se $x_i \in A \cap B$ $\qquad \gamma_{x_i} : I \longrightarrow A \cap B$

se $\in A$ $\qquad \gamma_{x_i} : I \longrightarrow A$

se $\in B$ $\qquad \gamma_{x_i} : I \longrightarrow B$

$$\psi([\delta]) = \phi_A([\delta_1 * \gamma_{x_1}]) \ \phi_B([\gamma_{x_1}^{-1} * \delta_2 * \gamma_{x_2}]) \cdots$$

$$\underset{A}{\cap} \qquad\qquad \underset{B}{\cap}$$

② $\Psi \circ (j_A)_* = \phi_A$ e analogamente per B

questo è semplice però se δ è un cammino $I \to A$

$[\delta] \in \pi_1(A, x_0)$ $\qquad (j_A)_* [\delta] = j_A \circ \delta = \delta$

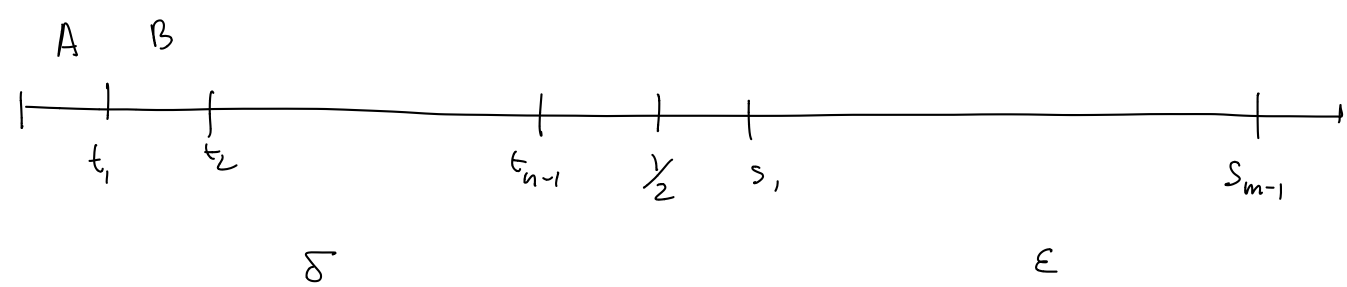
In questo non c'è bisogno di dividere I in sottointervalli e la definizione di Ψ diventa

$$\underset{\pi_1(X,x_0)}{\underset{\cap}{\Psi([\delta])}} = \underset{\pi_1(A,x_0)}{\underset{\cap}{\phi_A([\delta])}}$$

① Ψ è un morfismo di gruppi.

Siano δ e ε due cammini a valori in X da x_0 a x_0

$$\Psi([\delta * \varepsilon]) = \Psi([\delta]) \cdot \Psi([\varepsilon])$$



UTILIZZO UNA DIVISIONE DI I

"COMPATIBILE" CON $\delta \times \varepsilon$ CHE SIA

INDOTTA DA UNA DI δ E UNA DI ε

$$\Psi([\delta \times \varepsilon]) = \underbrace{\overbrace{\phi_A(-)\;\phi_B(-)\;\cdots\cdots}^{n \text{ termini}}}_{\Psi([\delta])} \Big| \underbrace{\overbrace{\cdots\cdots}^{m \text{ termini}}}_{\Psi([\varepsilon])}$$

#