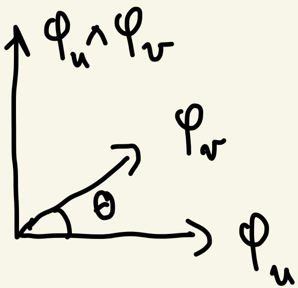
LEZIONE 21

ANALISI 2
NOVAGA
17/3/2021

INTEGRALI SU SUPERFICI NELLO SPAZIO

$\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad$ REGOLARE (INIETTIVA)

$\Sigma = \varphi(D)$ $\quad \hat{J}_\varphi = |\varphi_u \wedge \varphi_v|$



$\varphi_u \wedge \varphi_v \in \langle \varphi_u , \varphi_v \rangle^\perp$

$|\varphi_u \wedge \varphi_v| = |\varphi_u| \cdot |\varphi_v| \sin(\theta)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varphi_u^1 & \varphi_u^2 & \varphi_u^3 \\ \varphi_v^1 & \varphi_v^2 & \varphi_v^3 \end{pmatrix} \doteq \left(\varphi_u^2 \varphi_v^3 - \varphi_u^3 \varphi_v^2 , \; \varphi_v^1 \varphi_u^3 - \varphi_u^1 \varphi_v^3 , \; \varphi_u^1 \varphi_v^2 - \varphi_v^1 \varphi_u^2 \right)$$

$f: \Sigma \to \mathbb{R}$ $\qquad f \circ \varphi$ INTEGRABILE SU D

$$\int_{\Sigma} f = \int_{D} f(\varphi)\, \hat{J}_{\varphi} = \int_{D} f(\varphi)\, |\varphi_u \wedge \varphi_v|\, du\, dv$$

OSS: $\varphi_u \wedge \varphi_v$ È ORTOGONALE A $T_{\varphi(u,v)}\Sigma$ (PIANO TANGENTE)

$\Rightarrow n(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}$ È UN CAMPO UNITARIO

E NORMALE A Σ, DEFINISCE UN'ORIENTAZIONE

DI $\Sigma = \varphi(D)$

$F: \Sigma \to \mathbb{R}^3$ CAMPO DI VETTORI

$$\int_{\Sigma} F \cdot n = \int_{D} F(\varphi) \bullet \frac{(\varphi_u \wedge \varphi_v)}{\cancel{|\varphi_u \wedge \varphi_v|}} \cdot \cancel{|\varphi_u \wedge \varphi_v|} \, du \, dv$$

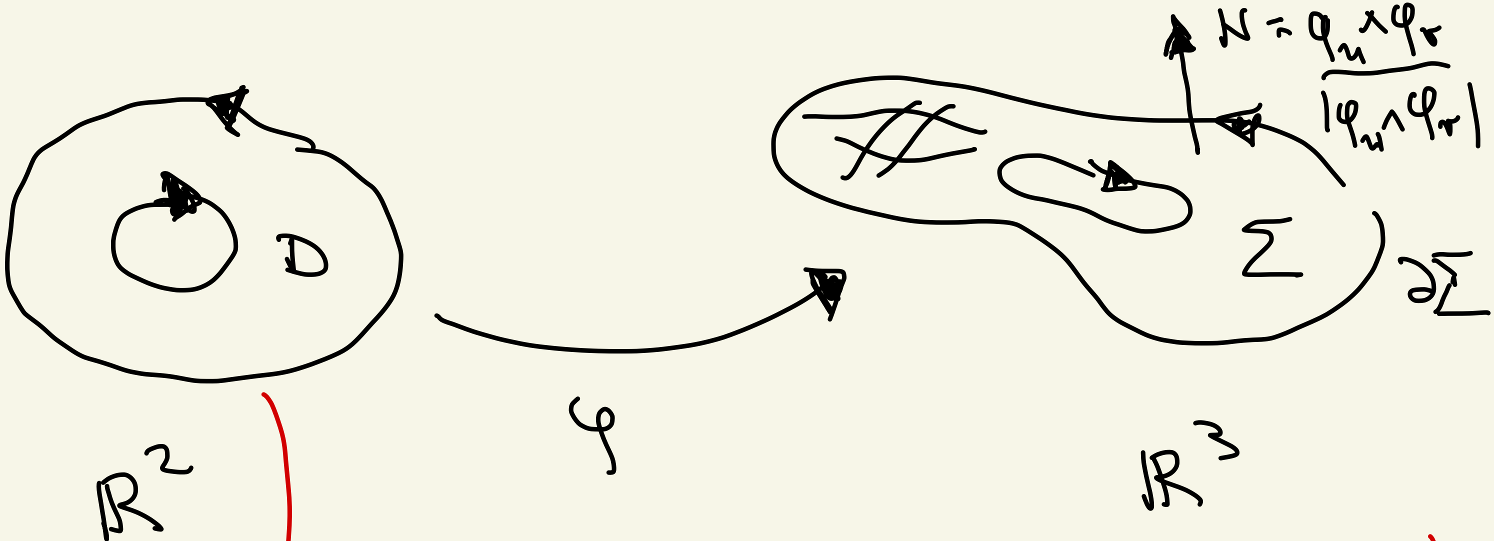
FLUSSO DI F ATTRAVERSO $\Sigma = \varphi(D)$

BORDO DI $\Sigma = \varphi(D)$

DEFINIAMO BORDO DI $\Sigma = \varphi(D)$ LA CURVA

$\partial \Sigma = \varphi(\partial D)$ (NON È IL BORDO TOPOLOGICO)

OSSERVIAMO CHE φ DEFINISCE UN'ORIENTAZIONE CANONICA DELLA CURVA $\partial\Sigma$



ORIENTAZIONE POSITIVA DI ∂D

SI INDICA CON $\partial^+\Sigma$ L'ORIENTAZIONE DI $\partial\Sigma$ INDOTTA DA φ

PIÙ IN GENERALE, DATA (Σ, n) SUP. ORIENTABILE IN $\mathbb{R}^3$, DEFINISCO L'ORIENTAZIONE POSITIVA $\tau : \partial\Sigma \to \mathbb{R}^3$, τ TANGENTE UNITARIO A $\partial\Sigma$, IN MODO CHE $\tau \wedge n \in T\Sigma$ "PUNTA" SEMPRE "FUORI" DA Σ

TEOREMA DI STOKES

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ SUPERFICIE ORIENTABILE CON BORDO $\partial^+\Sigma$ DI CLASSE C^1, $F : \Sigma \subseteq U \to \mathbb{R}^3$ CAMPO DI VETTORI C^1,

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot n = \int_{\partial^+\Sigma} F .$$

DOVE DATO $F: U \to \mathbb{R}^3$, U APERTO DI $\mathbb{R}^3$,

DEFINIAMO IL ROTORE DI F, $\operatorname{rot} F: U \to \mathbb{R}^3$, COME

$$\operatorname{rot} F = \text{``}\nabla \wedge F\text{''} = \text{``}\det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F^1 & F^2 & F^3 \end{pmatrix}\text{''}$$

$$\underset{\text{DEF}}{=} \left(\frac{\partial F^3}{\partial y} - \frac{\partial F^2}{\partial z}, \frac{\partial F^1}{\partial z} - \frac{\partial F^3}{\partial x}, \frac{\partial F^2}{\partial x} - \frac{\partial F^1}{\partial y} \right)$$

DIM: SUPPONIAMO $\Sigma = \varphi(D)$ CON $\varphi \in C^2$.

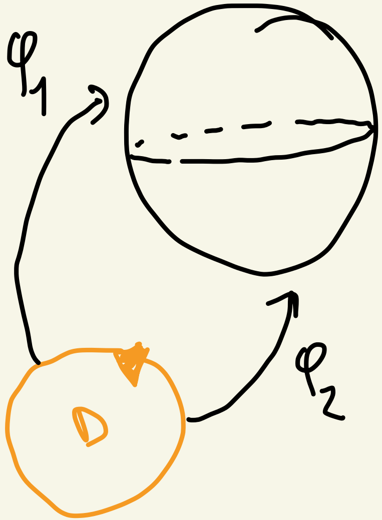
(!) IL CASO $\varphi \in C^1$ SI FA PER APPROSSIMAZIONE DATO CHE NELLA TESI DEL TEOREMA COMPAIONO SOLO LE DERIVATE PRIME DI φ

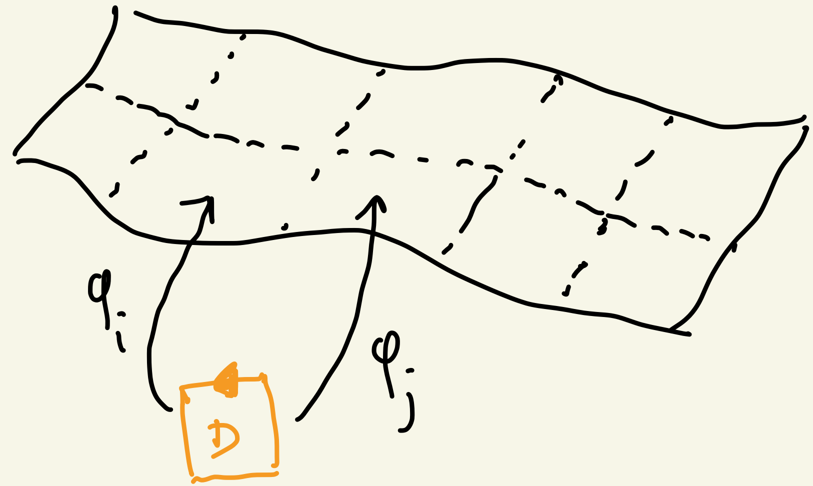
(!) DATA Σ ORIENTABILE E COMPATTA POSSO SEMPRE TROVARE $\varphi_i : D \to \mathbb{R}^3$ T.C.

$\varphi_i(D) \cap \varphi_j(D) = \emptyset \quad i \neq j$

$\Sigma = \bigcup_i \varphi_i(\bar{D})$

$D = ○, □$





VOGLIO CHE $n = \dfrac{(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v}{|\quad '' \quad|}$. IN TAL CASO

$$\int_{\Sigma} \mathrm{rot}\, F \cdot n = \sum_i \int_D (\mathrm{rot}\, F) \cdot \left[(\varphi_i)_u \wedge (\varphi_i)_v \right] du\, dv$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} F = \sum_i \int_{\partial^+ \varphi_i(D)} F = \sum_i \int_{\partial^+ D} F \cdot \tilde{\varphi}_i'(t)\, dt,$$ DOVE $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\partial^+ D}$

CONTINUIAMO LA DIM. NEL CASO $\Sigma = \varphi(D)$.

SCRIVIAMO $F(x,y,z) = \Big(X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z) \Big)$

$\Sigma \ni \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v) \big)$

E DEFINIAMO $\omega(x,y,z) = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

LA 1-FORMA IN $\mathbb{R}^3$ ASSOCIATA AD F,

IN MODO CHE $\displaystyle\int_{\partial^+\Sigma} F = \int_{\partial^+\Sigma} \omega$

VOGLIAMO MOSTRARE CHE

$$\int_{\partial^+\Sigma} \omega = \int_D \operatorname{rot} F \cdot (\varphi_u \wedge \varphi_v) =$$

$$= \int_D \left[(Z_y - Y_z) \det\begin{pmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{pmatrix} + (X_z - Z_x) \det\begin{pmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{pmatrix} + (Y_x - X_y) \det\begin{pmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{pmatrix} \right]$$

$$\operatorname{rot} F = (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y)$$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

HO ANCHE, PER $\omega = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ E

$\tilde{\varphi}(t) : \partial^+ D \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(\gamma(t)) = \big(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))\big)$

CON $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ PARAMETRIZZ. POSITIVA DI ∂D,

$$\tilde{\varphi}'(t) = \left(x_u u' + x_v v', \ y_u u' + y_v v', \ z_u u' + z_v \cdot v'\right) \qquad t \in [0,1]$$

$$\int_{\partial^+ \Sigma} \omega = \int_0^1 \left(X(\tilde{\varphi}(t)), Y(\tilde{\varphi}(t)), Z(\tilde{\varphi}(t))\right) \cdot \tilde{\varphi}'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(X \cdot x_u + Y y_u + Z \cdot z_u\right) u'(t) + \left(X x_v + Y y_v + Z z_v\right) v'(t)\, dt$$

$$= \int_{\partial^+ D} (X x_u + Y y_u + Z z_u)\, du + (X x_v + Y y_v + Z z_v)\, dv$$

$$= \int_D \left[(X x_v + Y y_v + Z z_v)_u - (X x_u + Y y_u + Z z_u)_v \right] du\, dv$$

GAUSS - GREEN

$$= \int_D \partial_u (X x_v) - \partial_v (X x_u) + \partial_u (Y y_v) - \partial_v (Y y_u) + \partial_u (Z z_v) - \partial_v (Z z_u)$$

C^2

$$= \int_D \Big(\cancel{X_x x_u x_v} + X_y y_u x_v + X_z z_u x_v - \cancel{X_x x_u x_v} - X_y y_v x_u - X_z z_v x_u \Big)$$

$$+ (Y \cdots) + (Z \cdots)\, du\, dv \overset{\text{VERIFICA DIRETTA}}{=} \int_D \mathrm{rot}(X, Y, Z)(\varphi_u \wedge \varphi_v)\, du\, dv.$$