$\boxed{\text{18 mar 2021}}$

- ~~Serie di Fourier~~
- es $\Delta u = 0$
- es forme e forme esatte

} dalla volta scorsa

$u, v \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ $\qquad \langle u, v \rangle \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \overline{v(t)}\, dt$

$\qquad \|u\|^2 \doteq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(t)|^2\, dt$

$e_k(t) \doteq e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$

sono un sistema ortonormale per $\langle , \rangle$

$$S_n u \doteq \sum_{|k| \le n} \underbrace{\langle u, e_k \rangle}_{\hat{u}_k} e_k$$

- $\|u\|^2 = \|S_n u\|^2 + \|u - S_n u\|^2$ (teorema di pitagora)
- $\|u - S_n u\| \longrightarrow 0 \quad n \to \infty$
- $\|u\|^2 = \lim_{n \to \infty} \|S_n u\|^2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{|n| \le k} |\hat{u}_k|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}_k|^2$
- $\langle u, v \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}$ (*)

$$\langle S_n u, S_n v \rangle = \sum_{|k| \le n} \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}$$

$$|\langle u, v \rangle - \langle S_n u, S_n v \rangle| \le |\langle u, v \rangle - \langle S_n u, v \rangle| + |\langle S_n u, v \rangle - \langle S_n u, S_n v \rangle|$$

$$\le \underbrace{\|u - S_n u\| \cdot \|v\|}_{\downarrow\, 0} + \|S_n u\| \underbrace{\|v - S_n v\|}_{\downarrow\, 0} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\|S_n u\|^2 \le \|u\|^2$ $\qquad \Longrightarrow$ (*)

$$v = z = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e_k$$

Questo lo abbiamo applicato $\quad u = z' = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} i k c_k e_k$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |z'(t)|^2\, dt = 2\pi \|z'\|^2 = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} k^2 |c_k|^2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} z'(t)\,\overline{z(t)}\, dt = 2\pi \langle z', z\rangle = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} ik|c_k|^2$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $\qquad u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) : \Delta u \equiv 0$ su Ω

Mostrare che se Ω è sempl connesso $\Rightarrow \exists\, v \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$

$\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$ su Ω $\qquad$ (v si chiama funz. armonica coniugata)

Dim: Basta osservare che la forma $\overset{A^1}{u_y}\, dx - \overset{A^2}{u_x}\, dy$ è chiusa ($\Downarrow$ Ω sempl connesso è esatta)

$$\partial_y u_y = u_{yy} \qquad \partial_2 A^1 - \partial_1 A^2 = u_{yy} - (-u_{xx})$$

$$\partial_x(-u_x) = -u_{xx} \qquad = \Delta u \equiv 0 \text{ su } \Omega$$

$\exists\, v \in C^2(\Omega) : \quad v_x = u_y, \quad v_y = -u_x$

$$\nabla u\, \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = u_x u_y - u_y u_x \equiv 0$$

Attenzione: l'ipotesi Ω sempl. connesso è indispensabile affinché v sia definita su tutto Ω

Esempio: $\quad u(x,y) = \log(x^2+y^2) \qquad \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \qquad u_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 4x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\,\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad u_{yy} = 2\cdot\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_y\,dx - u_x\,dy = 2\left[\frac{y}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\right]$$

chiusa ma non esatta

$U = 2\arctan\frac{x}{y}$ è un potenziale su $\{y \neq 0\}$

ma non è estendibile a tutto $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$

$$U_x = 2\,\frac{y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$U_y = 2\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -2\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

def $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x,y,z) = \overset{A^1}{(y-z)}\,dx + \overset{A^2}{(x+z+1)}\,dy + \overset{A^3}{(y-x+1)}\,dz$$

- Dire se è chiuso $\longrightarrow$ $\boxed{\partial_j A^i - \partial_i A^j = 0 \quad \forall\, i,j}$
- Dire se è esatta ✓ $\mathbb{R}^3$ è sempre connesso
- $\boxed{\text{Cal. il potenziale}}$?

$\omega = dU$ cioè $\partial_j U = A^j$ (*)

$$\begin{cases} \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = 1 - 1 = 0 \\ \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = 1 - 1 = 0 \\ \partial_1 A^3 - \partial_3 A^1 = (-1) - (-1) = 0 \end{cases}$$

$$U(x,y,z) \overset{\text{TFCI}}{=} U(0,y,z) + \int_0^x \partial_1 U(t,y,z)\,dt$$

$$\overset{!}{=} g(y,z) + x(y-z)$$

$\boxed{\partial_1 U = A^1}$ (*) per $j=1$

$\boxed{\partial_1 U = A_1}$

$\partial_2 U = g_y + x = A^2 = x + z + 1$ (*) $j=2$

$\partial_3 U = g_z - x = A^3 = y - x + 1$ (*) $j=3$

$g_y = z+1$

$\boxed{g_z = y+1}$

$g_y\,dy + g_z\,dz$ è esatta

$\quad\quad\quad \shortparallel$

$(z+1)\,dy + (y+1)\,dz$

$$g(y,z) \overset{\text{TFCI}}{=} g(0,z) + \int_0^y \partial_1 g(s,z)\,ds =$$

$$= h(z) + y(z+1)$$

$g_y = z+1$

$g_z = h'(z) + y = y+1$

$$h'(z) = 1 \quad \Rightarrow h(z) = z + \cos t$$

$$g(y,z) = y(z+1) + z + \cos t$$

$$U(x,y,z) = x(y-z) + y(z+1) + z + \cos t$$

$$\omega(x,y,z) = \overbrace{\frac{y^2+z^2-x^2}{[(x-y)^2+z^2]^2}}^{A^1} dx + \overbrace{\frac{2x(x-y)}{[\quad]^2}}^{A^2} dy - \overbrace{\frac{2xz}{[\quad]^2}}^{A^3} dz$$

- ω è chiusa?
- ω è esatta?
- potenziale = ?

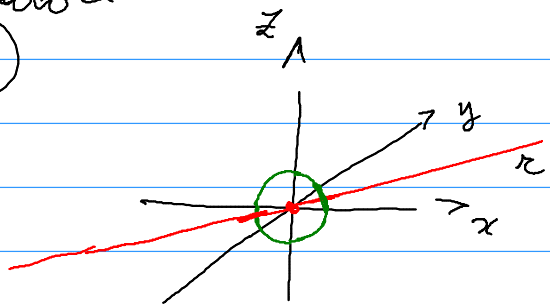
$$\text{dominio}(\omega) = \mathbb{R}^3 - \big(\underbrace{\{z=0\} \cap \{x=y\}}_{r}\big)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 &= 0 \\ \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 &= 0 \\ \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ verificare per esercizio $\Longrightarrow \omega$ chiusa

è un generatore $\Rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus r)$

$\gamma(t)$ con coordinate $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \sin t \end{cases}$

$t \in [0, 2\pi]$



$$\int_\gamma \omega \, dt = \int_0^{2\pi} \Big[\underbrace{(\sin^2 t - \cos^2 t)}_{A^1(\gamma(t))} \underbrace{(-\sin t)}_{x'(t)\,dt} + \underbrace{0}_{y'(t)\,dt = 0} - 2 \cos t \sin t \cos t \Big] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^3 t - \cos^2 t \sin t \, dt = -\int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}) \sin t \, dt = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_0 \text{ genera } \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus r) \\ \int_{\gamma_0} \omega = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_\gamma \omega = 0 \quad \forall \gamma \text{ curva a valori } \mathbb{R}^3 - \{r\}$$

$$\Longrightarrow \omega \text{ è esatta}$$

<u>Determino il potenziale</u>: $\partial_j U = A_j \qquad j = 1, 2, 3 \qquad (*)$

$(j=3)$ $(*)$

$$U(x,y,z) = \underset{1}{U(x,y,0)} + \int_0^z \partial_3 U(x,y,t)\, dt \qquad (x \neq y)$$

$$= g(x,y) + \int_0^z \frac{-2xt}{[(x-y)^2 + t^2]^2}\, dt$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{(x-y)^2 + t^2}\right)$$

$$= g(x,y) + \int_0^z \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x}{(x-y)^2+t^2}\right) dt = g(x,y) + \frac{x}{(x-y)^2+z^2} - \frac{x}{(x-y)^2}.$$

$$\boxed{U(x,y,z) = \tilde{g}(x,y) + \frac{x}{(x-y)^2+z^2}}$$

$(*)$ $j=1$ $\quad \partial_1 U = A_1 \Rightarrow \tilde{g}_x + \frac{(x-y)^2+z^2-2x(x-y)}{[\quad]^2} = \frac{x^2 \cancel{-2xy} + y^2 + z^2 - 2x^2 \cancel{+2xy}}{[\quad]}$

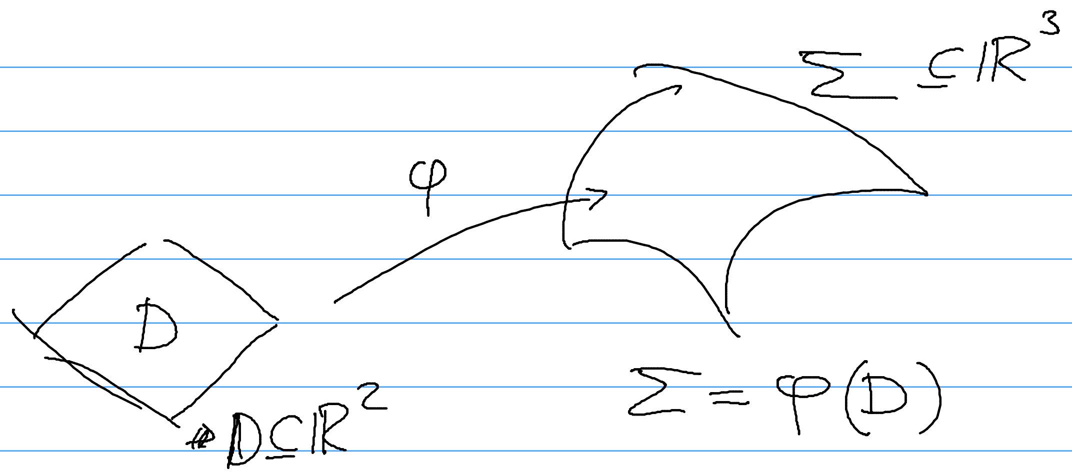
$(*)$ $j=2$ $\quad \boxed{\partial_2 U = A_2} \Rightarrow [\ldots]$ $\qquad = \tilde{g}_x + \frac{y^2+z^2-x^2}{[\quad]^2} = A_1$

$$\Downarrow \qquad \qquad \Downarrow$$

$$\tilde{g}_y \equiv 0 \qquad \qquad \tilde{g}_x \equiv 0$$

$$\Longrightarrow \tilde{g} \text{ è costante}$$

$$U(x,y,z) = \frac{x}{(x-y)^2+z^2} + \text{cost}$$



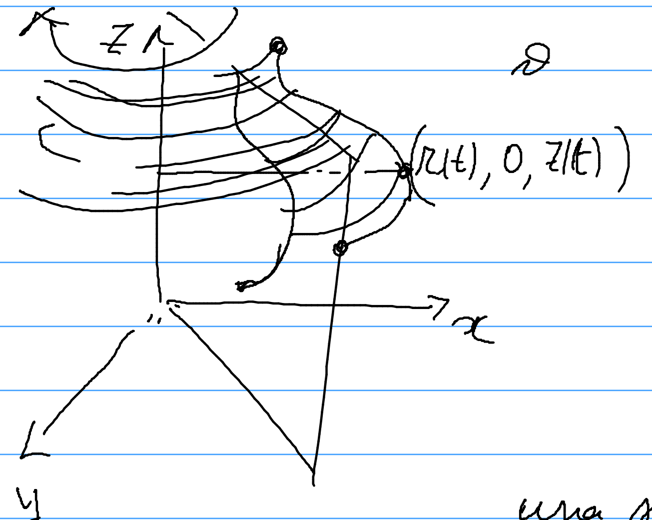
$\Sigma = \varphi(D)$

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_D J_\varphi(u,v)\, du\, dv$$

$$J_\varphi(u,v) = |\partial_u \varphi \wedge \partial_v \varphi| = \det\left(D\varphi^T \cdot D\varphi\right)$$

<u>Esercizio</u>: scrivere J_φ nel caso di una superficie di rotazione (risp. a z)

$$\varphi(t,\theta) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\theta \\ r(t)\sin\theta \\ z(t) \end{pmatrix}$$



$\partial_t \varphi$

$\partial_\theta \varphi$

$$|\partial_t \varphi \wedge \partial_\theta \varphi| = ?$$

e usare la formula ottenuta per calcolare la superficie di una sfera / un toro