Esponenziale di matrici

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v(t) = A v(t) & A \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ costante} \\ v(0) = v_0 & \text{ha sol. } v(t) = \exp(tA) v_0 \end{cases}$$

Infatti,

$$v(t) = v_0 + tAv_0 + \frac{t^2}{2} A^2 v_0 + \frac{t^3}{6} A^3 v_0 + \dots$$

differenziando termine a termine

$$\frac{d}{dt} v_t = A v_0 + t A^2 v_0 + \frac{t^2}{2} A^3 v_0 + \dots = A v(t)$$

O, direttamente con matrice come incognita:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = A X(t) & X(t): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{n \times n} \quad (\text{spesso } X_0 = I) \\ X(0) = X_0 & \text{ha soluzione } X(t) = \exp(tA) X_0 \end{cases}$$

Eulero esplicito: dividere $[0,T]$ in n intervalli di ampiezza $h = \frac{T}{n}$,

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + hAX_k = (I + hA) X_k \\ X_0 = X_0 \end{cases}$$

$0 \; t_1 \; t_2 \; t_3 \quad t_n = T$

$$X_k \approx X(t_k) \approx X\left(\frac{T}{k}\right)$$

$$\Rightarrow X_k = (I + hA)^k X_0 \qquad X_n = (I + hA)^n X_0 = \underbrace{\left(I + \frac{T}{n} A\right)^n}_{\text{converge a } \exp(T \cdot A) \text{ per } n \to \infty} X_0$$

Moler, Van Loan "Nineteen dubious ways to compute the exp. of a matrix"
'78 '03

Problema: crescita intermedia dei termini $\frac{A^k}{k!}$

es: $A = \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

(δ volte blocco di Jordan)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \delta & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \delta \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \delta^2 & \\ & 0 & \ddots & \delta^2 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta^3 \\ & \ddots & \ddots & \delta^3 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \dots, A^4 = 0$$

Se $\delta > 1$, crescono di molto prima di diventare 0 $\left(\|A^k\| = \delta^k\right)$

Stessa cosa succede per matrici non-normali,

Per una matrice normale, $A = QDQ^*$, $A^k = QD^kQ^*$

$$\|A^k\| = |\lambda_{max}|^k$$

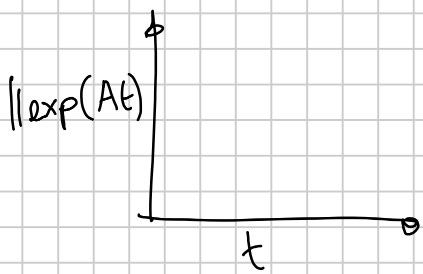
Per una non-normale, sono più grandi

Allo stesso modo, $\exp(tA)$ può avere forte crescita intermedia anche per matrici per cui $\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$

<u>ES</u>:

$$A = \begin{bmatrix} -0{,}97 & 25 \\ 0 & -0{,}3 \end{bmatrix}$$

$\exp(tA)$ avrà autovalori: $\exp(-0{,}97t)$ e $\exp(-0.3t)$ che tendono entrambi a 0 se $t \to \infty$



Quindi in $\left(I + \frac{1}{n}A\right)^n \approx \exp(A)$ le potenze intermedie (ad es. $\left(I + \frac{1}{n}A\right)^{n/2} \approx \exp\left(\frac{1}{2}A\right)$ possono essere molto più grandi del risultato finale (in norma)

$$\left\|\left(I + \frac{1}{n}A\right)^{n/2} \cdot \left(I + \frac{1}{n}A\right)^{n/2}\right\| \leq \left\|\left(I + \frac{1}{n}A\right)^{n/2} \cdot \left(I + \frac{1}{n}A\right)^{n/2}\right\|$$

<u>Approssimanti di Padé</u>:

Varianti della serie di Taylor in cui una funzione viene approssimata con una funzione razionale: data $f(x)$ analitica, <u>un'approssimante di Padé</u> di grado (p,q) è una f. razionale

$$\frac{N(x)}{D(x)} \quad \text{con} \quad N(x), D(x) \text{ polinomi di grado } p, q \text{ rispettivamente}$$

$$D(0) = 1$$

tale che $$f(x) - \frac{N(x)}{D(x)} = O\left(x^{p+q+1}\right) \quad \text{per } x \to 0$$

(approssimanti $(p,0)$ = polinomi di Taylor)

Ponendo uguali gli sviluppi di Taylor di $f(x)$ e $N(x)/D(x)$ fino all'ordine x^{p+q} si ottengono $p+q+1$ equazioni in $p+q+1$ incognite.

Alternativamente,

$$f(x) - \frac{N(x)}{D(x)} = O\left(x^{p+q+1}\right) \iff \boxed{D(x)f(x) - N(x) = O\left(x^{p+q+1}\right)}$$

(perché $D(0)=1 \Rightarrow$ molt. per $D(x)$ non cambia ordine di infinitesimo)

Quindi impongo che i primi $p+q+1$ coefficienti dello svil. di Taylor di $D(x)f(x) - N(x)$ siano 0 $\Rightarrow$ $p+q+1$ equazioni <u>lineari</u> nei $p+q+1$ coefficienti di N, D

$$\left(d_0 + d_1 x + \dots + d_q x^q\right)\Big(\overbrace{a_0 + a_1 x + \dots + a_{p+q} x^{p+q}}^{\text{Taylor di } f(x)} + O\left(x^{p+q+1}\right)\Big) - \left(n_0 + n_1 x + \dots + n_p x^p\right)$$

$$\exp - N_{pq}(x)/D_{pq}(x) = O\left(x^{p+q+1}\right) \quad \text{per}$$

$$\left[\begin{aligned} N_{pq}(x) &= \sum_{j=0}^{p} \frac{(p+q-j)!\,p!}{(p+q)!\,j!\,(p-j)!} x^j \\ D_{pq}(x) &= N_{pq}(-x) \end{aligned}\right]$$

Perché $D(x) = N(-x)$?

$$\frac{N(x)}{D(x)} - \exp(x) = O\left(x^{p+q+1}\right) = \frac{N(x)}{D(x)}\left(\frac{1}{\exp(x)} - \frac{D(x)}{N(x)}\right)\exp(x)$$

devono coincidere

$$\frac{N(-x)}{D(-x)} - \exp(-x) = O\left(x^{p+q+1}\right)$$

$$\parallel$$

$$\frac{D(x)}{N(x)} - \frac{1}{\exp(x)} = O\left(x^{p+q+1}\right)$$

Piano: se gli autoval. di A sono suff. vicini a 0, rimpiazzo $\exp(A)$ con $\underbrace{D_{pp}(A)^{-1} N_{pp}(A)}_{\text{ben condizionata?}}$ (scelgo $p=q$)

Per $p=q$, $\dfrac{(2p-j)!\,p!}{(2p)!\,j!\,(p-j)!} = \dfrac{p\cdot(p-1)\cdots(p-j+1)}{(2p)(2p-1)\cdots(2p-j+1)\,j!} \to \dfrac{1}{2^j \cdot j!}$

= coeff. dello svil. di Taylor di $\exp\left(\frac{1}{2}x\right)$

NON MOLTO FORMALE

Quindi per $p \to \infty$ $\quad N_{pp}(x) \approx \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$

$D_{pp}(x) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}x\right)$

quindi D_{pp} ha autovalori $\approx \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_i\right)$ se A ha autoval. λ_i

se gli autoval. di A hanno parti reali vicine $\left|\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_i\right)}{\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_j\right)}\right|$ è limitato

Riusciamo a limitare l'errore di un approssimante di Padé in funzione di $\|A\|$

$$H = f(A) \qquad f(x) = \log\left(e^{-x}\,\frac{N(x)}{D(x)}\right)$$

(funzione ben definita in un intorno di $x=0$, perché $e^{-0}=1$ $\frac{N(0)}{D(0)}=1$,

anzi $e^{-x}\,\frac{N(x)}{D(x)} = 1 + O(x^{p+q+1})$)

(Ricordiamo che funzioni di A commutano l'una con l'altra)

$$\exp(H) = e^{-A}\,D(A)^{-1}N(A)$$

$$\exp(A)\exp(H) = D(A)^{-1}N(A)$$

$$\exp(A+H) = D(A)^{-1}N(A)$$

$D(A)^{-1}N(A)$ è l'esponenziale di una perturbazione $A+H$ di A

Se $\frac{\|H\|}{\|A\|} < u$, allora l'errore $\exp(A) - D(A)^{-1}N(A)$

ha lo stesso ordine di grandezza dell'errore dovuto al troncamento di A in numeri di macchina (errore di rappresentazione di A)

$$f(x) = \log\left(\exp(-x)\,\frac{N(x)}{D(x)}\right) = c_1 x^{p+q+1} + c_2 x^{p+q+2} + c_3 x^{p+q+3} + \dots$$

(serie di Taylor che inizia dal termine x^{p+q+1})

$$H = f(A) = c_1 A^{p+q+1} + c_2 A^{p+q+2} + c_3 A^{p+q+3} + \dots$$

$$\|H\| \leq |c_1|\cdot\|A\|^{p+q+1} + |c_2|\,\|A\|^{p+q+2} + |c_3|\cdot\|A\|^{p+q+3} + \dots$$

$$\boxed{\text{Se } p=q=13 \text{ e } \|A\| \leq 5.4, \text{ allora } \frac{\|H\|}{\|A\|} < u = 2.2\cdot 10^{-16}}$$

Trovo la soluzione positiva y di

$$u = |c_1|\cdot y^{p+q} + |c_2|\cdot y^{p+q+1} + \dots$$

e a questo punto se $\|A\| < y$, allora

$$\frac{\|H\|}{\|A\|} \leq |C_1|\,\|A\|^{p+q} + |C_2| \cdot \|A\|^{p+q} + \ldots \leq |C_1| \cdot y^{p+q} + |C_2|\, y^{p+q+1} + \ldots$$

$= u$