Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 6)

Esercizio 1

Per ogni $k > 0$ sia γ_k una parametrizzazione (regolare) della circonferenza di equazione $(x-1)^2 + y^2 = k^2$ in $\mathbb{R}^2$ (percorsa una sola volta e in senso antiorario). Data la forma differenziale ω definita da

$$\omega(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y,$$

si calcoli

$$\oint_{\gamma_k} \omega,$$

al variare di $k \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$.

Esercizio 2

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) := \frac{z+y^2}{\sqrt{1+4(x^2+y^2)}},$$

e sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la parte di superficie di equazione $z = x^2 - y^2$ che si proietta ortogonalmente sull'insieme

$$T := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \geq 1, x^2+4y^2 \leq 4\}.$$

Calcolare

$$\int_\Sigma f \mathrm{d}\sigma.$$

Esercizio 3

Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale e $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definiti rispettivamente da

$$F(x,y,z) := (xy, xy, z);$$
$$\Sigma := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0\}.$$

Calcolare il flusso di F attraverso Σ, con orientazione indotta dal versore normale con terza componente non negativa.

Esercizio 4

Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale e $\phi : T \to \mathbb{R}^3$ la funzione definiti rispettivamente da

$$F(x, y, z) := (1, 0, 1);$$
$$\phi(u, v) := (u^2, \sqrt{2}uv, v^2),$$

dove $T := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u^2 + v^2 < 2, u < v\}$. Calcolare il flusso di F attraverso la superficie $\Sigma := \phi(T)$, con orientazione indotta dal versore normale con terza componente non negativa.

Esercizio 5

Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale e $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definiti rispettivamente da

$$F(x, y, z) := (0, ye^{-x}, 0);$$
$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq y\}.$$

Calcolare il flusso di F attraverso Σ, con orientazione indotta dal versore normale esterno alla superficie cilindrica.

Esercizio 6

1. Siano $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare e $f, g \in C^1(\overline{D})$ due campi scalari. Si dimostrino le identità:
$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial x} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\partial^+ D} fg \,\mathrm{d}y - \iint_D \frac{\partial f}{\partial x} g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$
$$\iint_D f \frac{\partial g}{\partial y} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_{\partial^+ D} fg \,\mathrm{d}x - \iint_D \frac{\partial f}{\partial y} g \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. Siano $n \geq 2$, $D \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato tale che ∂D sia una $(n-1)$-superficie regolare, $f, g \in C^1(\overline{D})$ due campi scalari e $F \in C^1(\overline{D}; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Fissato $i \in \{1, \dots, n\}$, si dimostrino le identità:
$$\int_D f \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = \int_{\partial D} fF \cdot n_e \,\mathrm{d}\sigma - \int_D \nabla f \cdot F \,\mathrm{d}x;$$

$$\int_D f \frac{\partial g}{\partial x^i} \, \mathrm{d}x = \int_{\partial D} f g n_e^i \, \mathrm{d}\sigma - \int_D \frac{\partial f}{\partial x^i} g \, \mathrm{d}x,$$

dove n_e indica il versore normale a ∂D esterno a D.

Esercizio 7

Sia $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito da

$$F(x, y) := \left(-2x^3 y, -\frac{1}{2} x^4 \right).$$

Si calcoli il flusso di F uscente dalla circonferenza con centro in $(0, 0)$ e raggio uno, sia direttamente sia (se possibile) applicando il Teorema della divergenza.

Esercizio 8

Siano ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^3$ definita da

$$\omega(x, y, z) := (y + z)\mathrm{d}x + (z + x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z,$$

e γ una curva regolare di sostegno $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = y\}$. Si calcoli il modulo dell'integrale di ω lungo γ, sia direttamente sia (se possibile) applicando il Teorema di Stokes.