LEZIONE 22

25/3/2021

NOVAGA

ANALISI 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

$$F\left(x, y(x), y'(x), \dots y^{(k)}(x)\right) = 0, \qquad x \in I \subseteq \mathbb{R},$$

FORMA <u>IMPLICITA</u> DI UN'EQ. DIFF. DI ORDINE k,

L'INCOGNITA È LA FUNZIONE $y : I \to \mathbb{R}^n$ DI CLASSE C^k,

$$F : I \times (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n \qquad F = (F_1, \dots F_n)$$

SE $n > 1$ SI CHIAMA ANCHE SISTEMA DI EQ. DIFF.

$$\begin{cases} F_1(-) = 0 \\ \vdots \\ F_n(-) = 0 \end{cases}$$

L'EQ. SCRITTA COME

$$y^{(k)}(x) = f\left(x, y, y', \dots y^{(k-1)}\right) \qquad (*)$$

SI DICE IN FORMA <u>ESPLICITA</u>

<u>OSS:</u> INTRODUCENDO $Y(x) = \left(y(x), y'(x), \dots, y^{(k-1)}(x)\right) \in \mathbb{R}^{nK}$

UN'EQ. DI ORDINE K IN $y(x)$

SI PUÒ RISCRIVERE COME EQ. DI ORDINE 1

IN $Y(x)$, CIOÈ $(*)$ DIVENTA

$$Y'(x) = \tilde{f}\left(x, Y(x)\right)$$

OSS: QUESTE EQ. SI CHIAMANO ORDINARIE

POICHÉ $x \in \mathbb{R}$,

ALTRIMENTI SAREBBERO

EQ. ALLE DERIVATE PARZIALI (NON IN QUESTO CORSO)

D'ORA IN POI GUARDIAMO EQ. O SISTEMI DEL PRIMO ORDINE.

DEF: IL PROBLEMA DI CAUCHY È UN'EQ. ABBINATA A OPPORTUNE "CONDIZIONI INIZIALI":

$$\boxed{\begin{cases} y' = f(x, y(x)) & x \in (x_0 - a, x_0 + a) \\ y(x_0) = y_0 & y : (x_0 - a, x_0 + a) \to \mathbb{R}^n \end{cases}}$$

SIAMO INTERESSATI A RISULTATI DI ESISTENZA (E UNICITÀ) PER IL PB DI CAUCHY

TEOREMA (CAUCHY): CONSIDERIAMO IL PB

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

CON $f: (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \to \mathbb{R}^n$, $a, r > 0$, LIMITATA E CONTINUA IN (x, y) E LIPSCHITZIANA IN y, CIOÈ

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$$

ALLORA $\exists\, \delta > 0$, CON $\delta \leq \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\}$ E $\delta < \frac{1}{L}$,

CON $M = \|f(x,y)\|_{L^\infty} = \sup_{(x,y)} |f(x,y)|$,

ED $\exists$ UN'UNICA SOL. $y(x) \in C^1(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

DEL PB DI CAUCHY.

DIM: PASSIAMO ALLA FORMULAZIONE INTEGRALE

DEL PB DI C. :

$$\int_{x_0}^{x} y'(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \Longrightarrow$$

$$\boxed{y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt} \quad (*)$$

y RISOLVE IL PB DI C. $\Longleftrightarrow$ E SOL. DI $(*)$

CERCHIAMO UNA SOLUZIONE DI $(*)$.

SIA $F(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$

$F : C(I_\delta) \to C(I_\delta)$ $\quad I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$,

$0 < \delta \leq a$ DA FISSARE DOPO,

NOI CERCHIAMO δ E y T.C.

$\boxed{y = F(y)}$ CIOÈ UN PUNTO FISSO DI F.

SIA ORA $X_{r,\delta} = \{ y(x) \in C(J_\delta) \text{ T.C. } \|y(x) - y_0\|_\infty \leq r \}$.

OSSERVIAMO CHE $X_{r,\delta}$ È UNO SP. METRICO COMPLETO CON LA NORMA INDOTTA DA $C(J_\delta)$.

CERCHIAMO $\delta > 0$ SUFF. PICCOLO, TALE CHE

$F\big|_{X_{r,\delta}} : X_{r,\delta} \to X_{r,\delta}$ E SIA UNA CONTRAZIONE.

DOBBIAMO VERIFICARE:

1. $F(y) \in X_{r,\delta} \quad \forall y \in X_{r,\delta}$

2. $\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty \leq C \|y_1 - y_2\|_\infty , \quad C < 1$

   $\forall y_1, y_2 \in X_r$

VERIFICHIAMO 1

$$F(y) \in X_r \iff \left| F(y)(x) - y_0 \right| \leq r \quad \forall x \in I_\delta$$

$$\left| F(y)(x) - y_0 \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \right| \leq M\delta \leq r$$

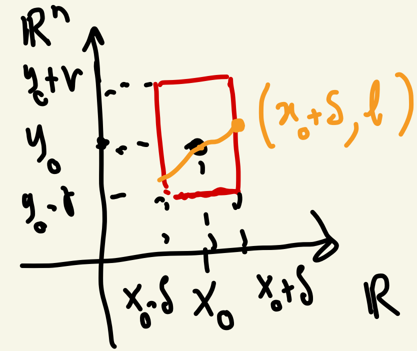
SE $\delta \leq \frac{r}{M}$

OSS: IL TEMPO DI ESISTENZA δ DIP.

"SOLO" DA a, M ED L.

DATA ORA UNA SOL. DEL PR. DI CAUCHY,

$y \in C^1(I_\delta)$ ABBIAMO CHE y È M-LIPSCHITZ



$$\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0+\delta} y(x) = \ell$$

1. $\delta = a$
2. $\delta < a$ MA $\ell \in \{y_0+r, y_0-r\}$
3. $\delta < a$ E $\ell \in (y_0-r, y_0+r)$ IN QUESTO CASO POSSIAMO ESTENDERE LA SOL. "RIPARTENDO" DA $(x_0+\delta, \ell)$

VERIFICHIAMO 2.

SIANO $y_1, y_2 \in X_r$ E CALCOLIAMO

$$\left| F(y_1)(x) - F(y_2)(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \left[f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \right] dt \right|$$

$$\leq \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_1) - f(t, y_2) \right| dt \leq L \int_{x_0}^{x} |y_1 - y_2| \leq L \cdot \delta \|y_1 - y_2\|$$

F È L-LIPSCITZ

DOBBIAMO RICHIEDERE $\delta < \frac{1}{L}$

CONCLUSIONE: SE $\delta \leq a$, $\delta \leq \frac{r}{M}$ E $\delta < \frac{1}{L}$

$\Rightarrow F\big|_{X_r}$ È UNA CONTRAZIONE

$\Rightarrow \exists!$ PUNTO FISSO $\quad y = F(y) \quad y \in X_r$

$\Rightarrow \exists!$ SOL. DEL PB. DI C. IN $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

COR: SE $y:(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ È LA SOLUZIONE MASSIMALE DEL PB. DI C.

$$\Rightarrow \delta_2 = a \quad \sigma \quad \lim_{x\to x_0+\delta_2} y(x) = y_0 \pm r$$

E

$$\delta_1 = a \quad \sigma \quad \lim_{x\to x_0-\delta_1} y(x) = y_0 \pm r$$

COR: SE δ_1 E δ_2 SONO I TEMPI MASSIMALI DI ESISTENZA $\Rightarrow$

$$\delta_1 \text{ E } \delta_2 \geq \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\},$$

CIOÈ NON C'È PIÙ LA DIPENDENZA DA L.

COR: $r = +\infty$, CIOÈ $f : (x_0 - a, x_0 + a) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ALLORA, SE $\delta_2 < a \Rightarrow \lim_{x \to x_0 + \delta_2} |y(x)| = +\infty$

E LO STESSO VALE PER δ_1. (TEOREMA DELL'ASINTOTO)