LEZIONE 23

ANALISI 2

25/3/2021

STIAMO CONSIDERANDO IL PROBLEMA

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n \\ f : (x_0 - a, x_0 + a) \times B_r(y_0) \to \mathbb{R}^n \end{array}$$

f CONTINUA E LIP. IN y

ABBIAMO VISTO CHE $\exists !$ SOLUZIONE y

CON $\delta \sim \min\left\{a, \frac{r}{M}\right\}$

IN QUESTE IPOTESI SU f

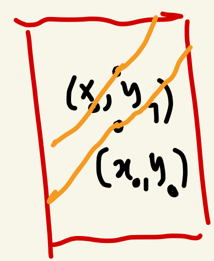
LA SOLUZIONE $y(x; y_0)$ DIPENDE CON CONTINUITÀ DA y_0

DATO INIZIALE

TEO SIA $y_1 \in B_r(y_0)$ E SIA

$y(x; y_1)$ SOL. DEL PROBLEMA CON $y(x_0) = y_1$

DEF. IN $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ $\qquad \delta_1 = \min\left\{a, \dfrac{r - |y_0 - y_1|}{M}\right\}$



ALLORA $\exists\, \bar\delta$ E C DIP. DA f, CIOÈ DA M ED L,

$$\boxed{|y(x;y_0) - y(x;y_1)| \leq C\,|y_0 - y_1| \qquad \forall x \in (x_0-\bar\delta,\, x_0+\bar\delta).}$$

DIM. SCRIVIAMO IL PROBLEMA IN FORMA INTEGRALE

$$y(x;y_i) = y_i + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s;y_i))\,ds \qquad i=0,1$$

FACCIAMO LA DIFFERENZA

$$|y(x;y_0) - y(x;y_1)| \leq |y_0 - y_1| + \int_{x_0}^{x} |f(s,y(s;y_0)) - f(s,y(s;y_1))|\,ds$$

$$|y(x;y_0) - y(x;y_1)| \leq |y_0 - y_1| + L \int_{x_0}^{x} |y(s;y_0) - y(s;y_1)|\, ds$$

$$\leq |y_0 - y_1| + L \cdot \bar{\delta}\, \| y(s;y_0) - y(s;y_1) \|_{L^\infty(I_{\bar{\delta}})}$$

$$I_{\bar{\delta}} = (x_0 - \bar{\delta},\, x_0 + \bar{\delta})$$

PASSANDO AL SUP IN $x \in I_{\bar{\delta}}$ E PRENDENDO $\boxed{\bar{\delta} < \frac{1}{L}}$

$$\| y(x;y_0) - y(x;y_1) \|_{L^\infty} \leq |y_0 - y_1| + L\bar{\delta}\, \| y(x;y_0) - y(x;y_1) \|_{L^\infty}$$

E QUINDI $$\| y(x;y_0) - y(x;y_1) \|_{L^\infty} \leq \underbrace{\frac{1}{1 - L\bar{\delta}}}_{C} |y_0 - y_1|.$$

OSS: USANDO L'EQUAZIONE

$$y' = f(x, y)$$

$$\| y'(x; y_0) - y'(x; y_1) \|_{L^\infty} = \| f(x, y(x; y_0)) - f(x, y(x; y_1)) \|_{L^\infty}$$

$$\leq L \| y(x; y_0) - y(x; y_1) \| \leq CL |y_0 - y_1|$$

LA CONVERGENZA È ANCHE IN $C^1(\tilde{I}_\delta)$.

LEMMA DI GRONWALL

$v \in C^0(I_\delta(x_0))$ T.C.

$$0 \leq v(x) \leq \alpha + \beta \left| \int_{x_0}^{x} v \right| \quad \forall \; x \in I_\delta(x_0) \quad \text{CON } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\Rightarrow \; v(x) \leq \alpha \, e^{\beta |x - x_0|}.$$

DIM. GUARDIAMO IL CASO $x > x_0$ E PONIAMO

$$u(x) = \alpha + \beta \int_{x_0}^{x} v, \quad \text{QUINDI} \quad 0 \leq v(x) \leq u(x)$$

$u(x)$ VERIFICA $u'(x) = \beta v(x) \leq \beta u(x)$.

CIOÈ $\quad u' - \beta u \leq 0 \qquad u(x_0) = \alpha$

$$e^{-\beta(x-x_0)}\left(u' - \beta u\right) = \left(e^{-\beta(x-x_0)} u\right)' \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-\beta(x-x_0)} u(x) \leq u(x_0) = \alpha \qquad \forall\, x > x_0$$

$$\Longrightarrow \quad v(x) \leq u(x) \leq \alpha\, e^{\beta(x-x_0)} \qquad \forall\, x > x_0 .$$

USANDO QUESTO LEMMA OTTENGO

TEOREMA NELLE IPOTESI DEL TEOREMA PRECEDENTE

SI HA

$$\left| y(x;y_0) - y(x;y_1) \right| \leq e^{L|x-x_0|} \cdot |y_0 - y_1| \quad \forall x \in I_{\bar{\delta}}.$$

DIM. RAGIONO COME PRIMA E ARRIVO ALLA STIMA

$$\left| y(x;y_0) - y(x;y_1) \right| \leq |y_0 - y_1| + L \int_{x_0}^{x} \left| y(s;y_0) - y(s;y_1) \right| ds$$

E CONCLUDO CON IL LEMMA DI GRONWALL, PONENDO $\alpha = |y_0 - y_1|$, $\beta = L$, $v(x) = \left| y(x;y_0) - y(x;y_1) \right|$.

OSS: CON UN PO' DI ATTENZIONE SI VEDE CHE C'È DIP. CONTINUA (LIP.) ANCHE DALLA COPPIA (x_0, y_0).

COSA POSSIAMO DIRE SE f È SOLO CONTINUA?

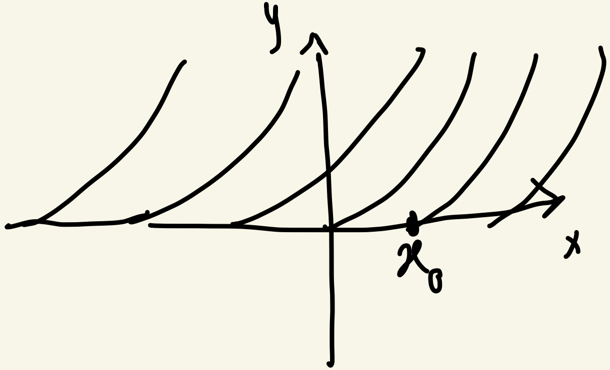
ES (BAFFO DI PEANO)
$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y(x)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$f(x,y) = 2\sqrt{|y|}$

NON È LIP.

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_0 \\ (x-x_0)^2 & x > x_0 \end{cases}$$

SONO TUTTE SOLUZIONI



BAFFO DI PEANO

QUINDI IN GENERALE NON C'È UNICITÀ,

C'È PERÒ ESISTENZA (!)

E SI FA APPROSSIMANDO f CON FUNZIONI

f_n LIP. IN y.

RICORDIAMO UN TEOREMA DI COMPATTEZZA PER FUNZIONI CONTINUE SU UN COMPATTO.

TEOREMA (ASCOLI-ARZELÀ)

K SP. METRICO COMPATTO (ES. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ COMPATTO)

$C(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ CONTINUE} \}$

SP. DI BANACH CON $\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)|$

SIA $f_n \in C(K)$ T.C.

1) $\sup_n |f_n(x)| < +\infty \quad \forall x \in K$

2) f_n SONO EQUICONTINUE, CIOÈ $\forall \varepsilon \; \exists \delta$

T.C. $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists f \in C(K)$ ED $\exists n_k$ SOTTOSUCC. T.C.

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow[C(K)]{} f(x) \quad \text{PER } k \to +\infty .$$

DIM. K ESSENDO COMPATTO È SEPARABILE,

CIOÈ AMMETTE UN INSIEME DENSO NUMERABILE.

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n, \quad X_n \text{ FINITI}, \quad \overline{X} = K.$$

X_n: DATO n SIA $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{x \in K}$ UN RICOPRIMENTO DI K

$\Rightarrow \exists$ SOTTORICOPRIMENTO FINITO $\left\{B_{\frac{1}{n}}(x)\right\}_{x \in X_n}$.

OSSERVIAMO CHE $\forall x \in K \quad \exists\, x' \in X_n$

T.C. $d(x, x') < \frac{1}{n}$, DA CUI SEGUE $\overline{X} = K$.

$X = \{x_1, \ldots x_k, \ldots\}$, GUARDIAMO $f_n(x_k)$ CON $x_k \in X$ FISSATO.

PER (1) LA SUCC. $n \to f_n(x_1)$ AMMETTE UNA SOTTOSUCC. CONVERGENTE $f_n^{(1)}(x_1)$,

FACCIO LA STESSA COSA CON $f_n^{(1)}(x_2)$, E COSÌ VIA:

$$
\begin{array}{llllll}
f_1^{(1)}(x_1) & f_2^{(1)}(x_1) & \ldots & f_n^{(1)}(x_1) & \longrightarrow & y_1 \in \mathbb{R} \\
f_1^{(2)}(x_2) & f_2^{(2)}(x_2) & \ldots & f_n^{(2)}(x_2) & \longrightarrow & y_2 \in \mathbb{R} \\
\vdots & & & & & \\
f_1^{(k)}(x_k) & f_2^{(k)}(x_k) & \ldots & f_n^{(k)}(x_k) & \longrightarrow & y_k \in \mathbb{R} \\
\vdots & & & & &
\end{array}
$$

CONSIDERO LA SOTTOSUCC. DI f_n DATA DA

$g_k = f_k^{(k)}$ E OSSERVO CHE, PER COSTRUZIONE,

$$g_k(x_i) \xrightarrow[k\to\infty]{} y_i \in \mathbb{R} \quad \forall\, x_i \in X .$$

DICO CHE g_k È DI CAUCHY IN $C(K)$

E QUINDI $\exists\, f \in C(K)$ T.C. $g_k \xrightarrow[C(K)]{} f$ PER $k \to \infty$.

DEVO MOSTRARE CHE $\forall \varepsilon \ \exists K_\varepsilon$ T.C.

$$|g_k(x) - g_\ell(x)| \leq 3\varepsilon \quad \forall k, \ell > K_\varepsilon \text{ E } \forall x \in K.$$

Lo posso fare perché $X_{\bar{n}}$ è finito!

FISSATO $\varepsilon > 0$ SIA δ T.C. VALE ②

E SIA $\bar{n}$ T.C. $\frac{1}{\bar{n}} < \delta$.

SO CHE $g_k(x_i)$ È DI CAUCHY $\forall x_i \in X_{\bar{n}}$,

SIA QUINDI K_ε T.C. $|g_k(x_i) - g_\ell(x_i)| \leq \varepsilon \ \forall x_i \in X_{\bar{n}}$
$\forall k, \ell > K_\varepsilon$.

FISSATO $x \in K \ \exists x_j \in X_{\bar{n}}$ T.C. $d(x, x_j) < \frac{1}{\bar{n}} < \delta$.

E QUINDI, RICORDANDO 2, ABBIAMO

$$|g_k(x) - g_\ell(x)| \le |g_k(x) - g_k(x_j)| + |g_k(x_j) - g_\ell(x_j)|$$

$$+ |g_\ell(x_j) - g_\ell(x)| \le 3\varepsilon \quad \forall k, \ell \geq K_\varepsilon .$$

2

OSS: SE $f_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ T.C. $f_n|_{\overline{B}_R}$ SONO EQUILIMITATE ED EQUICONTINUE $\forall R > 0$

$\Rightarrow \exists$ SOTTOSUCC. f_{n_k} E UNA FUNZIONE CONTINUA $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ T.C.
$f_{n_k} \to f$ PER $k \to \infty$, UNIF. IN OGNI CPT $K \subseteq \mathbb{R}^n$.