Note Title 2021-03-25

Teo: sia f differenziabile di Fréchet in $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, allora

$$f\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & L_{f,X}[E] \\ 0 & f(X) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n\times 2n}$$

(versione a blocchi di $f\left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$)

dim:

$$f\left(\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E+ZX \\ 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X+\varepsilon E & -(X+\varepsilon E)Z+E+ZX \overset{!}{=} 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

Scelgo Z t.c. $-(X+\varepsilon E)Z+E+ZX = 0$ soluzione: $Z = \frac{1}{\varepsilon}I$

difatti, sostituendo $-\frac{1}{\varepsilon}X - E + E + \frac{1}{\varepsilon}X = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X+\varepsilon E & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & I \end{bmatrix}}\, f\left(\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = f\left(\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X+\varepsilon E) & 0 \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{f\left(\begin{bmatrix} X+\varepsilon E & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(X+\varepsilon E) & 0 \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X+\varepsilon E) & -\frac{1}{\varepsilon}f(X) \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\varepsilon}I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{bmatrix} f(X+\varepsilon E) & \frac{1}{\varepsilon}f(X+\varepsilon E) - \frac{1}{\varepsilon}f(X) \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}}$$

Mandiamo $\varepsilon \to 0$,

$$f\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f(X) & L_{f,X}[E] \\ 0 & f(X) \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Teo: Se $f \in C^{2m-1}(U)$, allora è Fréchet-derivabile per tutte le matrici $X \in \mathbb{C}^{m \times m}$ con autovalori in U.

Dim: Per la dim. del teo. prima, le derivate direzionali esistono e sono continue in X $\Rightarrow$ per un teorema di analisi II, la funzione $f: \mathbb{R}^{m^2} \to \mathbb{R}^{m^2}$ è differenziabile.

Conseguenza più pratica: abbiamo un modo di calcolare $L_{f,X}[E]$ per ogni funzione di matrice che sappiamo calcolare.

$$K_{abs}(f, X) = \|\hat{L}_{f,X}\|$$

Scelta solita: misuro $\|X\|_F = \|vec(X)\|_2$ $\Rightarrow$ misuro $\|\hat{L}_{f,X}\|_2$

(norma Euclidea indotta su matrici $n^2 \times n^2$)

Teo: siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ gli autovalori di $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (con molt.)
Allora, gli autovalori di $\hat{L}_{f,X}$ sono

$$f[\lambda_i, \lambda_j] := \begin{cases} \dfrac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{se } \lambda_i \neq \lambda_j \\ f'(\lambda_i) & \text{se } \lambda_i = \lambda_j \end{cases} \qquad i = 1, 2, \dots n, \; j = 1, 2, \dots n$$

---

dim: Rimpiazziamo f con un suo polinomio di interpolazione p sugli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ di X con il doppio delle molteplicità, in modo che

$$p(X) = f(X) \quad \text{e} \quad p\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} X & E \\ 0 & X \end{bmatrix}\right)$$

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_d x^d$$

$$p(X+E) = p_0 I + p_1(X+E) + p_2(X+E)^2 + \dots + p_d(X+E)^d$$

$$= p_0 I + p_1 X + p_1 E + p_2\left(X^2 + XE + EX\right) + p_3\left(X^3 + X^2E + XEX + EX^2\right) + \dots + O(\|E\|^2)$$

$$EXE \qquad E^3X \qquad EEXEXE$$

$$= p(X) + \underbrace{p_1 E + p_2(XE+EX) + p_3(X^2E + XEX + EX^2) + \dots}_{L_{f,X}}$$

$$\hat{L}_{f,X} = p_1 I_{n^2\times n^2} + p_2\left(1\otimes X + X^T\otimes 1\right) + p_3\left(1\otimes X^2 + X^T\otimes X + (X^T)^2\otimes 1\right) + \dots$$

$$p_4\left(1\otimes X^3 + X^T\otimes X^2 + (X^T)^2\otimes X + (X^T)^3\otimes 1\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{d} p_k \sum_{h=1}^{k} \underbrace{(X^T)^{k-h}} \otimes \underbrace{X^{h-1}}$$

$$V_1D_1V_1^{-1} \quad \cancel{U_1S_1V_1^*} \qquad V_2D_2V_2^{-1} \quad \cancel{U_2S_2V_2^*}$$

Prendo forme di Schur $X = Q_1T_1Q_1^*$, $X^T = Q_2T_2Q_2^*$, e ho

$$\hat{L}_{f,X} = \sum_{k=0}^{d} p_k \,(Q_2\otimes Q_1)\left(\sum T_2^{k-h}\otimes T_1^{h-1}\right)(Q_2\otimes Q_1)^*$$

$$= \underbrace{(Q_2\otimes Q_1)}_{\text{ort.}}\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{d} p_k \sum_{h=1}^{k} T_2^{k-h}\otimes T_1^{h-1}}_{\text{triang.}}\right)\underbrace{(Q_2\otimes Q_1)^*}_{\text{ort}^*}$$

Sulla diagonale, ho n^2 elementi che corrispondono alle scelte per $i,j = 1,2,\dots n$ di

$$\sum_{k=0}^{d} p_k \underbrace{\sum_{h=1}^{k} \lambda_j^{k-h}\cdot\lambda_i^{h-1}}$$

$$= \lambda_j^0\lambda_i^{k-1} + \lambda_j^1\lambda_i^{k-2} + \dots + \lambda_j^{k-1}\lambda_i^0 = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i^k - \lambda_j^k}{\lambda_i - \lambda_j} & \text{se } i\neq j \\ k\lambda_i^{k-1} & \text{se } i=j \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{p(\lambda_i)-p(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j} & i\neq j \\[2ex] p'(\lambda_i) & i=j \end{cases} \qquad i,j = 1,2,\dots n$$

□

Se X diagonalizzabile, posso rifare la dim. con $X = V_1 D V_1^{-1}$, $X^T = V_2 D V_2^{-1}$
e ottenere $\hat{L}_{f,X} = (V_2 \otimes V_1)\, \mathcal{D}\, (V_2 \otimes V_1)^{-1}$ $\quad \mathcal{D}$ con el. $f[\lambda_i, \lambda_j]$ $i,j=1..n$

$$\|\hat{L}_{f,X}\| \le \underbrace{\kappa(V_2)\,\kappa(V_1)}_{=\,\kappa(V_1)^2} \cdot \|\mathcal{D}\| = \kappa(V_1)^2 \cdot \max |f[\lambda_i, \lambda_j]|$$

V matrice autovettori, difatti $V_1 = V_2^{-T}$

$f(X)$ mal-condizionata come funzione di matrice:
- potenzialmente, se $\kappa(V)$ grande
- sicuramente, se $|f[\lambda_i, \lambda_j]|$ grande per qualche λ_i, λ_j

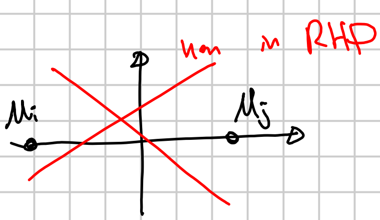
Q per quali λ_i, λ_j è grande $f[\lambda_i, \lambda_j]$, dove f = radice quadrata principale?

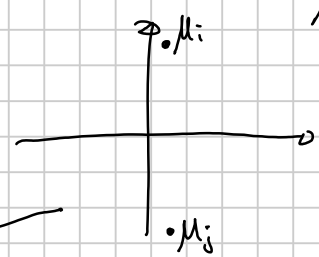
$$\frac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$$

1) se c'è un autovalore molto piccolo: $\lambda_i \in \Lambda(X)$ dà $f'(\lambda_i) \in \Lambda(L_{f,X})$ (prendendo $i=j$)

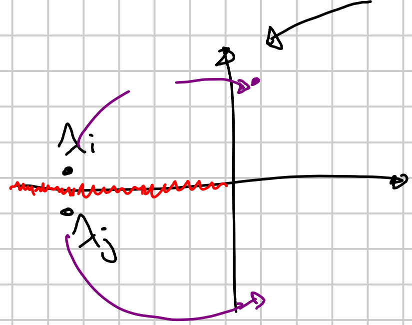
$\mu_i = \lambda_i^{1/2} \in RHP$ $\quad \mu_j = \lambda_j^{1/2} \in RHP$
$= f(\lambda_i)$ $\quad = f(\lambda_j)$

$$f[\lambda_i, \lambda_j] = \frac{\mu_i - \mu_j}{\mu_i^2 + \mu_j^2} = \frac{1}{\mu_i + \mu_j}$$





grande non solo se μ_i, μ_j piccoli, ma anche se
$\mu_i = a_1 + i b_1$



$\mu_j = a_2 + i b_2$

con a_1, a_2 piccoli

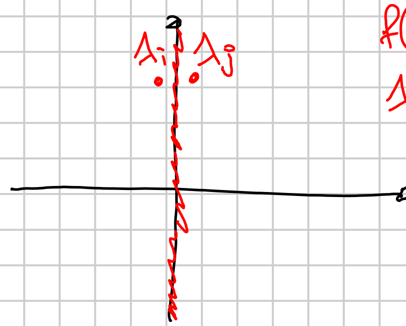
e $b_1 + b_2$ piccolo

$\Rightarrow$ cioè quando ho due autovalori vicini (da lati opposti) all'asse reale negativo

---

Funzione segno:
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \operatorname{Re}(x) > 0 \\ -1 & \text{se } \operatorname{Re}(x) < 0 \\ \text{non def.} & \text{se } \operatorname{Re}(x) = 0 \end{cases}$$

Per quali valori questa volta $\dfrac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$ è grande?



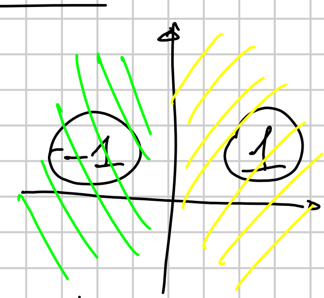
$f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = -2$

$\lambda_i - \lambda_j$ piccolo

Per l'esponenziale, quando $\dfrac{\exp(\lambda_i) - \exp(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}$ è piccolo?

$$\frac{\exp(\lambda_i) - \exp(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = \exp(\mu) \quad \text{per } \mu \in [\lambda_i, \lambda_j]$$

Funzione segno:
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \operatorname{Re} x > 0 \\ -1 & \operatorname{Re} x < 0 \\ \text{indef.} & \operatorname{Re} x = 0 \end{cases}$$



Se $A = V J V^{-1} = \left[V_1 \middle| V_2 \right] \left[\begin{array}{c|c} J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \end{array} \right] \left[V_1 \middle| V_2 \right]^{-1}$

allora $\operatorname{sgn}(A) = V \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} V^{-1}$

$\Lambda(J_1) \subseteq LHP$

$\Lambda(J_2) \subseteq RHP$

$V_1 = \text{span}(\text{catene di Jordan associate a } J_1)$ "sottosp. invariante stabile"

$V_2 = \text{span}(\text{catene di Jordan associate a } J_2)$ "sottosp. inv. instabile"

$$\boxed{x = \exp(\lambda_i t) \qquad \dot{x} = \lambda_i x}$$

se so $\text{sgn}(A)$, allora posso determinare anche $V_1 = \text{Im}(\text{sgn}(A) - I)$

$V_2 = \text{Im}(\text{sgn}(A) + I)$

$$\text{sgn}(A) - I = V\begin{bmatrix} I & \\ & -I \end{bmatrix}V^{-1} - I = V\begin{bmatrix} 2I & \\ & 0 \end{bmatrix}V^{-1} = [V_1|V_2]\begin{bmatrix} 2I & \\ & 0 \end{bmatrix}[V_1|V_2]^{-1}$$

$$\text{sgn}(A)^2 = V\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}V^{-1} = V \cdot I \cdot V^{-1} = I$$

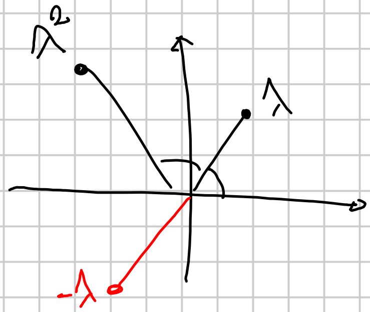
$=$ comb. lin. di colonne di V_1

$B^{-1/2} :\overset{def}{=} (B^{1/2})^{-1}$

Teo: $\text{sign}(A) = A \cdot (A^2)^{-1/2} = A \cdot \left((A^2)^{1/2}\right)^{-1}$

$f(g(A)) = f \circ g(A)$

Dim: sugli autovalori, basta vedere che $\text{sign}(\lambda) = \dfrac{\lambda}{(\lambda^2)^{1/2}}$



Le due radici quadrate di λ^2 sono $\pm\lambda$

la principale è quella che sta nel semipiano dx, cioè λ se $\text{Re}\,\lambda > 0$

e $-\lambda$ se $\text{Re}\,\lambda < 0$ □

Teo:

$$\text{sign}\begin{bmatrix} 0 & A \\ I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}$$

e, più in generale, $\text{sgn}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ C^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = A(BA)^{-1/2}$.

dim:

$$\text{sgn}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^2\right)^{-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BA \end{bmatrix}\right)^{-1/2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (AB)^{-1/2} & 0 \\ 0 & (BA)^{-1/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & A(BA)^{-1/2} = C \\ \underbrace{B(AB)^{-1/2}}_{D \overset{??}{=} C^{-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

Resta da dim. che $D = C^{-1} = B(AB)^{-1/2}$. Per farlo, calcolo

$$I = \left(\operatorname{sgn}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} CD & 0 \\ 0 & DC \end{bmatrix} \Leftrightarrow CD = DC = I$$