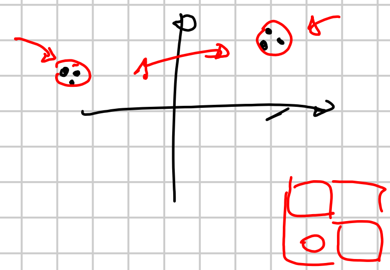
Note Title 2021-03-30

$$\frac{|f(\lambda_i)-f(\lambda_j)|}{|\lambda_i-\lambda_j|}$$

$$K_{abs}(\mathrm{sign}(A)) \le K_2(V)\, \frac{2}{\displaystyle\min_{\substack{\lambda_i,\lambda_j \text{ in} \\ \text{semip. opposti}}} |\lambda_i-\lambda_j|}$$

In realtà,

1) non conta $K_2(V)$, ma solo "separare" autovalori nei semipiani dx e sx cioè diagonalizzare a blocchi



2) nel caso in cui la separaz. tra le due nuvole di autoval. sia piccola, la dipendenza è anche peggio di $\frac{1}{\text{differenza}}$

Metodi di calcolo:

1) Schur + ricorrenze
2) approssimaz. razionali

Metodo (1): suppongo di avere Q unitaria t.c.

$$M = Q\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} Q^* \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} \Lambda(A) \subseteq LHP \\ \Lambda(B) \subseteq RHP \end{array}$$

$$\mathrm{sign}(M) = Q\,\mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) Q^* = Q\begin{bmatrix} -I & Z \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^*$$

Per determinare Z, equivalentemente,

1) trovo X t.c. $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix}$, poi

$$\mathrm{sign}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & X \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

2) impongo $M \cdot \mathrm{sign}(M) = \mathrm{sign}(M) M$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Sylv. con $\dfrac{1}{\mathrm{sep}(A,B)}$

$\sim \dfrac{1}{|\lambda - \mu|}$ nel caso normale, peggio nel caso non-normale

$(1,2)$: $AZ + C = -C + ZB \Rightarrow AZ - ZB = -2C \quad (*)$

Risolvendo l'eq. di Sylvester trovo Z e $\mathrm{sign}(M)$

Alg: Schur-Parlett per il segno:

1) Calcolo $\mathrm{Schur}(M)$
2) riordino $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ $\quad \Lambda(A) \subseteq LHP$, $\Lambda(B) \subseteq RHP$ $\to$ già questo è sufficiente per calcolare il sott. invariante stabile di M
3) risolvo $(*)$
4) $\mathrm{sign}(M) = Q \begin{bmatrix} -1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q^*$

Condizionamento di $\mathrm{sign}(M)$ quando $\mathrm{sep}(A,B) = \delta$ è piccolo:

Supponiamo (a meno di cambi di base ortogonali) $M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$

$\tilde{M} = M + E = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{C} \\ \tilde{D} & \tilde{B} \end{bmatrix}$ $\quad \|\tilde{A} - A\|, \|\tilde{B} - B\|, \|\tilde{C} - C\| \le \|E\|$ $\quad \mathrm{sign}(M) = \begin{bmatrix} -1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Teo (della lezione 2): esiste X con $\|X\|_F = O\left(\dfrac{\|E\|_F}{\delta}\right)$ t.c.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix}(M+E)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{C}X & \tilde{C} \\ 0 & \tilde{B} - X\tilde{C} \end{bmatrix}$$

polinomio in X che (per X opportuna) si annulla

$$\mathrm{sign}(M+E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix} \mathrm{sign}\left(\begin{bmatrix} \tilde{A} + \tilde{C}X & \tilde{C} \\ 0 & \tilde{B} - X\tilde{C} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \tilde{Z} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -X & 1 \end{bmatrix}$$

con $\tilde{Z}$ che risolve

$$(\tilde A + \tilde C X)\tilde Z - \tilde Z(\tilde B - X\tilde C) = -2\tilde C$$

è una perturbazione di $AZ - ZB = -2C$

$$\|\tilde A + \tilde C X - A\|_F \le \|\tilde A - A\|_F + \|C\|_F \underset{\frac{\|E\|_F}{\delta}}{\underset{\wedge|}{\|X\|_F}} + \underbrace{\|\tilde C - C\|_F \|X\|_F}_{O(\|E\|^2)}$$

Coeff. perturbati di una quantità $\frac{\|E\|_F}{\delta}$

$\Rightarrow$ soluzione $\tilde Z$ perturbata di $O\left(\underset{1/\delta}{K(\text{Sylvester})} \cdot \frac{\|E\|_F}{\delta}\right)$

$$\frac{\|\tilde Z - Z\|_F}{\|Z\|_F} \le O\left(\frac{1}{\delta^2}\cdot\|E\|_F\right) \qquad \text{Ma anche } \|Z\| = O\left(\frac{\|C\|}{\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \|\text{sign}(M+E) - \text{sign}(M)\|_F = \left\| \begin{bmatrix}1&0\\X&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\tilde Z\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-X&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1&Z\\0&1\end{bmatrix}\right\|_F = O\left(\frac{\|E\|}{\delta^3}\right)$$

$\Rightarrow$ se $\delta = \text{sep}(A,B)$ piccolo, il segno può essere parecchio instabile

Però, questa instabilità scompare in parte se guardo solo i sottosp. invarianti:

$\begin{bmatrix}-1&\tilde Z\\0&1\end{bmatrix}$ ha sottosp. inv. stabile span$\left(\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right)$

e $\begin{bmatrix}1&0\\X&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&\tilde Z\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-X&1\end{bmatrix}$ ha sottosp. inv. stabile span$\left(\begin{bmatrix}1&0\\X&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix}I\\X\end{bmatrix}$$

che è a distanza $O\left(\frac{\|E\|_F}{\delta}\right) = \|X\|_F$ da $\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$ che spanna il sottosp. inv. stabile di $\text{sign}(M) = \begin{bmatrix}-1&Z\\0&1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ sebbene mal condizionato, il segno produce sottosp. invarianti che sono molto ben mal condizionati. [Byers, Mehrmann, He 1997]

"Newton for the matrix sign"

$$X_0 = M \qquad X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right)$$

Vedremo che $\lim_{k\to\infty} X_k = \mathrm{sign}(M)$, con converg. quadratica

Se M diagonalizzabile, $M = VDV^{-1}$ $\qquad \mathrm{sign}(M) = V \begin{bmatrix} \mathrm{sign}(d_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{sign}(d_n) \end{bmatrix} V^{-1}$

$$X_0 = VDV^{-1} \qquad X_1 = \frac{1}{2}\left(VDV^{-1} + VD^{-1}V^{-1}\right) = V\Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}(D+D^{-1})}_{D_1}\Big)V^{-1}$$

$$X_2 = \frac{1}{2}\left(X_1 + X_1^{-1}\right) = V \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(D_1 + D_1^{-1}\right)}_{D_2} V^{-1} \quad \dots \quad X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right) = V\left(\tfrac{1}{2}(D_k + D_k^{-1})\right)V^{-1}$$

Stiamo facendo su ogni autovalore λ_i individualmente l'iterazione

$$x_0 = \lambda_i \qquad x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right) = \frac{x_k^2+1}{2x_k}$$

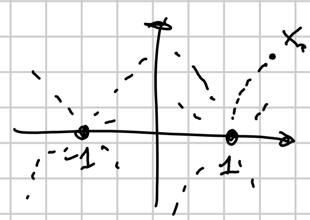
Questa iterazione è il metodo di Newton su $f(x) = x^2-1$: infatti:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2-1}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + 1}{2x_k} = \frac{x_k^2+1}{2x_k}$$

Essendo Newton, convergerà quadraticamente (localmente) a una delle soluzioni di $f(x)=0$, cioè ± 1

Teo: Per l'iter. scalare $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{1}{x_k}\right)$, $\lim_{k\to\infty} x_k = \mathrm{sign}(x_0)$

per ogni $x_0 \notin$ asse immaginario.



Dim: cambio di variabile (Cayley transform)

$$y = \frac{x-1}{x+1} \qquad x = \frac{1+y}{1-y}$$

$y(x+1) = x-1$

$x(y-1) = -1-y$

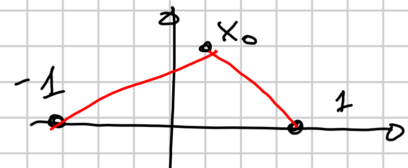
Definiamo $y_k := \dfrac{x_k - 1}{x_k + 1}$ e vediamo qual è l'iterazione corrispondente

$$
\begin{tikzcd}
x_k \arrow[r, "f:\, x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x})"] \arrow[d, leftrightarrow] & x_{k+1} \arrow[d, leftrightarrow] \\
y_k \arrow[r, "g:\, y \mapsto y^2"] & y_{k+1}
\end{tikzcd}
$$

$$y_{k+1} = \frac{x_{k+1} - 1}{x_{k+1} + 1} = \frac{\frac{1}{2}(x_k + x_k^{-1}) - 1}{\frac{1}{2}(x_k + x_k^{-1}) + 1} = \frac{x_k^2 + 1 - 2x_k}{x_k^2 + 1 + 2x_k} = \frac{(x_k - 1)^2}{(x_k + 1)^2} = y_k^2$$

se $|y_0| > 1 \Rightarrow |y_k| \to \infty \Rightarrow y_k \to \infty \Rightarrow x_k \to -1$

se $|y_0| < 1 \Rightarrow |y_k| \to 0 \Rightarrow y_k \to 0 \Rightarrow x_k \to +1$



$$|y_0| = \frac{|x_0 - 1|}{|x_0 + 1|} = \frac{\mathrm{dist}(x_0, 1)}{\mathrm{dist}(x_0, -1)} = \begin{cases} > 1 \text{ se } x_0 \in LHP & \Rightarrow \quad x_k \to -1 \\ < 1 \text{ se } x_0 \in RHP & \Rightarrow \quad x_k \to +1 \end{cases}$$

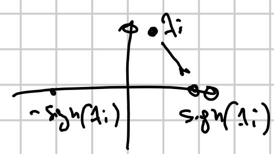
$$\lim x_k = \mathrm{sign}(x_0)$$

Teo: L'iteraz. matriciale $X_{k+1} = \frac{1}{2}(X_k + X_k^{-1})$ converge a $S = \mathrm{sign}(X_0)$

dim:
$$Y_k := (X_k - S)(X_k + S)^{-1} = (X_k + S)^{-1}(X_k - S)$$

X_k, Y_k, S sono tutte funzioni di matrice di X_0, quindi commutano

$$X_0 = V J V^{-1} \qquad Y_0 = V \underbrace{(J - S)(J + S)^{-1}}_{} V^{-1}$$



ha sulla diagonale $\dfrac{\lambda_i - \mathrm{sign}(\lambda_i)}{\lambda_i + \mathrm{sign}(\lambda_i)} \in$ cerchio unitario

$$\left| \frac{\lambda_i - \mathrm{sign}(\lambda_i)}{\lambda_i + \mathrm{sign}(\lambda_i)} \right| < 1$$

$$\rho(Y_0) < 1$$

$$(2X_k)(2X_k)^{-1}$$

$$Y_{k+1} = (X_{k+1} - S)(X_{k+1} + S)^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) - S\right)\left(\tfrac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) + S\right)^{-1}$$

$$= \left(\left(\tfrac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) - S\right) 2X_k\right)\left(\left(\tfrac{1}{2}(X_k + X_k^{-1}) + S\right) 2X_k\right)^{-1}$$

$$= \Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ S^2}}{X_k^2 + I} - 2X_kS \Big)\Big(X_k^2 + \underset{\substack{\shortparallel \\ S^2}}{I} + 2X_kS \Big)^{-1} = (X_k - S)^2 (X_k + S)^{-2}$$

$$= \left[(X_k - S)(X_k + S)^{-1} \right]^2 = Y_k^2$$

Poiché $\rho(Y_0) < 1$, $\lim_{k \to \infty} Y_k = 0$

Cambio di var. inverso:

$$Y_k = (X_k - S)(X_k + S)^{-1} \qquad (X_k + S) Y_k = X_k - S$$

$$Y_k X_k - X_k = -S - S Y_k \qquad (Y_k - I) X_k = S(-I - Y_k)$$

$$X_k = S (Y_k + I)(I - Y_k)^{-1}$$

Quindi $Y_k \to 0 \Rightarrow X_k \to S$

Algoritmo:

1) $X_0 = M$

2) $X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1} \right)$, ripeto fino a convergenza