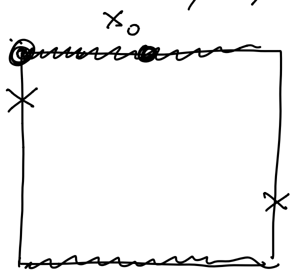
ESERCIZI

ESERCIZIO 21

$$M = I^2 / \sim \qquad (0, t) \sim (1, 1-t)$$



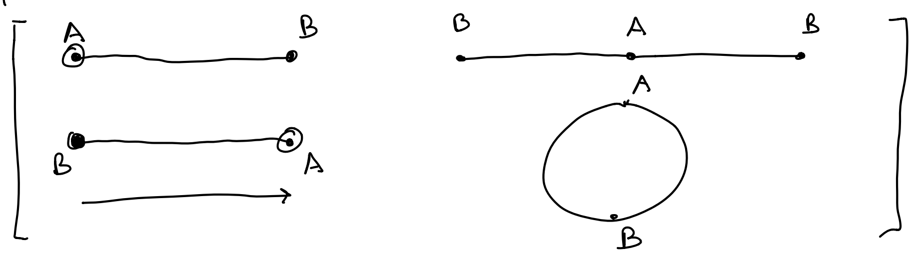
$\partial M = I \times \{0, 1\}$ $\qquad \sim$ è la restr. di quella di sopra.

1) $\pi_1(M, x_0) \cong \mathbb{Z}$

$\pi_1(\partial M, x_0) \cong \mathbb{Z}$

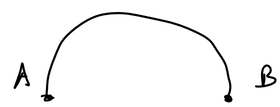
INIZIAMO CON ∂M

$\partial M \simeq S^1$



Se definisco

$$\begin{cases} \varphi(0, t) = e^{\pi i t} \\ \varphi(1, t) = -e^{\pi i (1-t)} \end{cases}$$



allora φ passa al quoz. e definisce $\bar{\varphi} : \partial M \longrightarrow S^1$ bigettiva

$$\partial M = I \times \{0, 1\} / \sim$$

$\varphi : I \times \{0, 1\} \longrightarrow S^1$ continua

compatibile con $\sim$ implica che induce

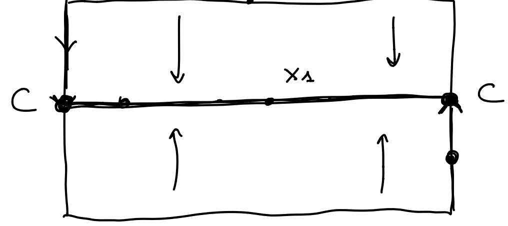
$\bar{\varphi} : \partial M \longrightarrow S^1$ continua.

$\pi_1(\partial M, x_0) \simeq \mathbb{Z}$.

$\pi_1(M, x_0)$

$\cong$

$\pi_1(M, x_1)$



$S^1 \times I.$

Sia $\quad Z = I \times \{1/2\} / \sim \;\cong\; S^1$

$$r(x,y) = (x; 1/2)$$

passa al quoz e defi $\quad \bar{r} : M \longrightarrow Z$

$$\bar{r}\big|_Z = id_Z$$

$$\tilde{H} : I^2 \times I_t \longrightarrow I^2 \xrightarrow{\pi} M$$

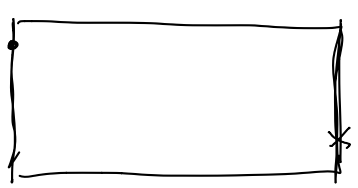
$$\tilde{H}((x,y), t) = \left(x; y + t\left(\tfrac{1}{2} - y\right)\right)$$

$$\tilde{H}((x,y), 0) = (x,y)$$

$$\tilde{H}((x,y), 1) = \left(x, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$H : \underline{I^2 \times I_t} \longrightarrow \underline{M} \qquad H = \pi \circ \tilde{H}$$

H è compatibile con la relazione di equivalenza che ho su I^2.



$$\boxed{H((0,y)\, t) = H((1, 1-y)\, t)}$$

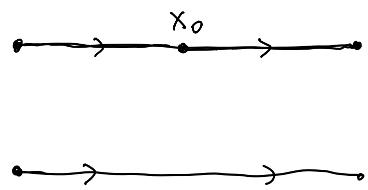
$$\left[0, y + t\left(\tfrac{1}{2} - y\right)\right] \qquad \left[\left(1, (1-y) + t\left(\tfrac{1}{2} - 1 + y\right)\right)\right] \quad -\tfrac{1}{2}$$

$$\left[0, \tfrac{1}{2}t + (1-t)y\right] \;=\; \left[\left(1, 1 - \left[\tfrac{1}{2}t + (1-t)y\right]\right)\right]$$

M è omotopicamente equivalente a Z $\qquad \pi_1(M, x_1) \simeq \mathbb{Z}$.

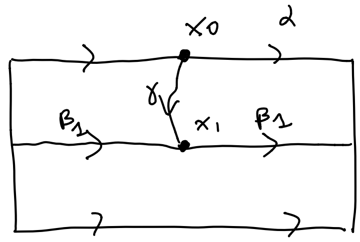
2) $\quad i : \partial M \longrightarrow M$

si descrive $\quad i_* : \pi_1(\partial M, x_0) \longrightarrow \underline{\pi_1(M, x_0)}$



Sia $\alpha : I \longrightarrow \partial M$ come in figura

$[\alpha]$ è un generatore di $\pi_1(\partial M, x_0)$



$\pi_1(M, x_0) \simeq \pi_1(M, x_1)$

$[\beta_1]$ è un generatore di $\pi_1(M, x_1)$

$[\gamma * \delta * \gamma^{-1}] \longleftarrow [\delta]$

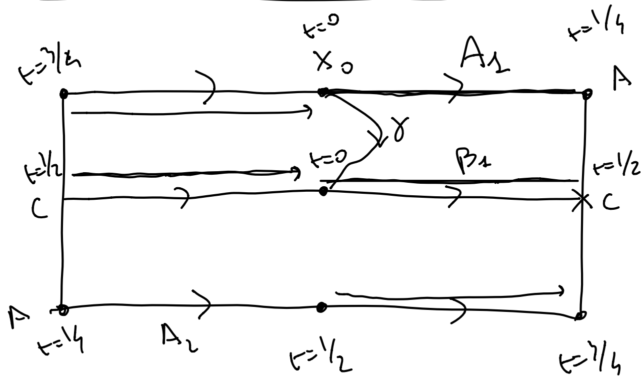
$[\beta_0] = [\gamma * \beta_1 * \gamma^{-1}]$ è un generatore di $\pi_1(M, x_0)$

Voglio calcolare $\quad i_*\left([\alpha]\right) = n\,[\beta_0] \quad = 2\,[\beta_0]$.

Ricordiamo di

$\underline{r_* : \pi_1(M, x_1) \xrightarrow{\ \sim\ } \pi_1(Z, x_1)}$

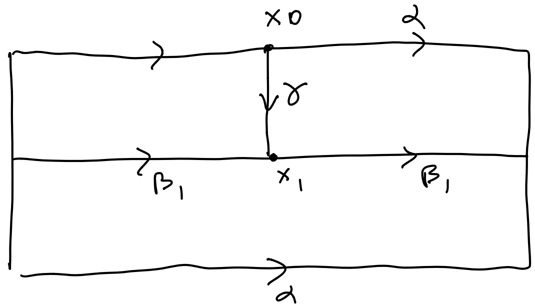
$\boxed{r_*(\alpha) = \beta_1 * \beta_1}$ $\qquad \Big|\ r \circ \alpha = \beta_1 * \beta_1$



$r \circ \alpha \sim \beta_1 * \beta_1$

$$i_*([\alpha]) \longrightarrow \gamma^{-1} * i_*([\alpha]) * \gamma \longrightarrow r_*(\gamma^{-1} * i_*([\alpha]) * \gamma)$$

$$\begin{array}{ccccc} \cap & & & & \\ \pi_1(M, x_0) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \pi_1(M, x_1) & \xrightarrow[r_*]{\ \sim\ } & \pi_1(Z, x_1) \\ [\delta] & & [\gamma^{-1} * \delta * \gamma] & & \end{array}$$



$$\underline{r_*(\gamma^{-1})} * r_* i_*([\alpha]) * \underline{r_*(\gamma)} \sim$$

$$\sim \quad 1_{x_1} * \beta_1 * \beta_1 * 1_{x_1}$$

quindi $\quad i_*([\alpha]) \longrightarrow 2[\beta_1]$

$\hookrightarrow = n[\beta_0]$

$$i_*([\alpha]) = 2[\beta_0]$$

3) NON ESISTE UNA RETRAZIONE

$\rho : M \longrightarrow \partial M \qquad \underline{r \circ i = id} : \partial M \longrightarrow \partial M$

$$\begin{array}{ccc} \rho_* \circ i_* = id : \pi_1(\partial M, x_0) & \longrightarrow & \pi_1(\partial M, x_0) \\ \cong & & \cong \\ \mathbb{Z}[\alpha] & & \mathbb{Z}[\alpha]. \end{array}$$

$$i_*([\alpha]) = 2[\beta_0].$$

$$\rho_*(2[\beta_0]) = 2\rho_*([\beta_0])$$

$$\underline{\underline{[\alpha]}}. = \rho_*(i_*[\alpha]) = \underline{2\rho_*([\beta_0])}$$

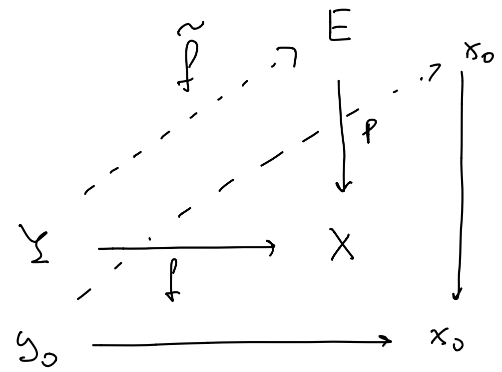
ma $[\alpha]$ non è il doppio di un elemento in $\pi_1(\partial M, x_0)$ perché tale gruppo è isomorfo a $\mathbb{Z}$ e $[\alpha]$ è il suo generatore #

TEOREMA DI SOLLEVAMENTO

TEOREMA Y loc. conn per archi e connesso $\quad p: E \longrightarrow X$ rivestimento.

$f: Y \longrightarrow X$ continua

$y_0 \in Y \qquad f(y_0) = x_0 \qquad p(\tilde{x}_0) = x_0 \qquad \tilde{x}_0 \in E$



$\exists\ \tilde{f}: Y \longrightarrow E$ tale che $\tilde{f}(y_0) = x_0$

$\Longleftrightarrow$

$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

E questo esiste tale $\tilde{f}$ è unica

dim

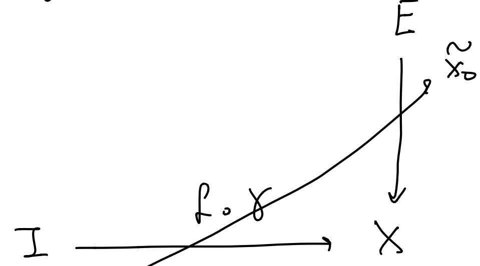
$\boxed{\Rightarrow}$ dimostrata l'altra volta

$\boxed{\Leftarrow}$

unicità di $\tilde{f}$

Sia $y \in Y$ voglio far vedere che $\tilde{f}(y)$ è univocamente determinata. Scelgo un cammino γ da y_0 a y e considero $f \circ \gamma$

$\exists_1$ il sollevamento $\widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde{x}_0}$



$\circ \longrightarrow x_0$

ma anche $\tilde f \circ \gamma$

1) $p \circ \tilde f \circ \gamma = f \circ \gamma$

2) $\tilde f \circ \gamma(0) = \tilde f(y_0) = \tilde x_0$

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d] \\ I \arrow[r, "\gamma"] & Y \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, "\tilde f"] & X \end{tikzcd}$$

$$\widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde x_0} = \tilde f \circ \gamma$$

Quindi se valuto in $t = 1$ $\quad \gamma(1) = y$

$$\tilde f(y) = \widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde x_0}(1)$$

Esistenza

Definisco $\boxed{\tilde f(y) = \widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde x_0}(1)}$

dove γ è un cammino da y_0 a y.

L'ALTRA VOLTA AVEVATE VISTO CHE QUESTA DEFINIZIONE DI $\tilde f(y)$ NON DIPENDE DALLA SCELTA DI γ. (QUI SI USA $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, \tilde x_0))$)

RIMANE DA VERIFICARE

1) • $p \circ \tilde f = f$

2) • $\tilde f$ è continua.

1) $$p(\tilde f(y)) = p\left(\widetilde{f \circ \gamma}_{\tilde x_0}(1)\right) = f \circ \gamma(1) = f(y).$$

2) Sia $y \in Y$ e voglio dimostrare che $\tilde{f}$ è continua in Y.

$$\tilde{f}(y) = \tilde{x}$$
$$f(y) = x \qquad \underline{p(\tilde{x}) = x.}$$

Sia U un intorno di x ben rivestito.

$$p^{-1}(U) = \coprod V_i \qquad \tilde{x} \in V = V_0$$

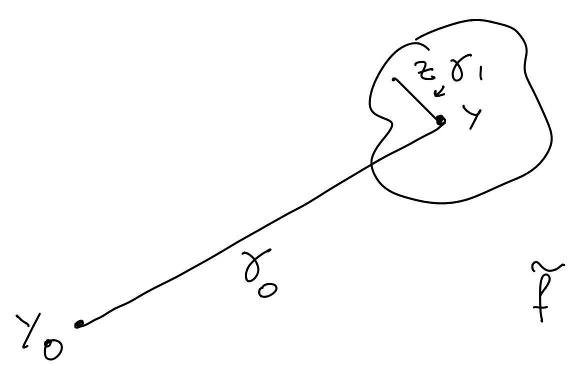
$$p|_V : V \xrightarrow{\sim} U$$

Per continuità di f posso scegliere W intorno di y, tale $f(W) \subset U$, e posso assumere W connesso per archi.

Verifico che $\tilde{f}|_W = (p|_V)^{-1} \circ f|_W$

e quindi è continua.

$$\begin{tikzcd} & V \\ W \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & U \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$



Se $z \in W$ voglio calcolare $\tilde{f}(z)$

Sia γ_0 un cammino da y_0 in y.
e sia γ_1 un cammino da y in z

$\gamma = \gamma_0 * \gamma_1$ è un cammino da x_0 in z.

$$\tilde{f}(z) = \widetilde{f\circ\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) =$$

$$\widetilde{f\circ\gamma}_{x_0} = \underline{\underline{\widetilde{f\circ(\gamma_0 * \gamma_1)}}}_{x_0}$$

$$\widetilde{f\circ\gamma_0}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{f}(x) = \tilde{x}$$

$$= \widetilde{(f\circ\gamma_0 * f\circ\gamma_1)}_{\tilde{x}_0} = \underline{\underline{\widetilde{f\circ\gamma_0}_{\tilde{x}_0}}} * \widetilde{(f\circ\gamma_1)}_{\tilde{x}}$$

perché $\widetilde{(f\circ\gamma_0)}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}$

questo è un cammino continuo che solleva $f\circ(\gamma_0 * \gamma_1)$ con punto iniziale $\tilde{x}_0$

$$\begin{array}{c} V \\ \uparrow (p|_V)^{-1} \\ f\circ\gamma_1 : I \longrightarrow U \end{array}$$

$\gamma_1 : I \longrightarrow W \qquad f(W) \subset U.$

$$\widetilde{(f\circ\gamma_1)}_{\tilde{x}} = (p|_V)^{-1} \circ f\circ\gamma_1$$

e quindi $\tilde{f}(z) = \widetilde{f\circ\gamma}_{\tilde{x}_0}(1) =$

$\boxed{\text{per } z\in W}$

$$= ((p|_V)^{-1} \circ f\circ\gamma_1)(1)$$

$$= \underline{(p|_V)^{-1}(f(z))}$$

#

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d] & \tilde{x}_0 \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & X & \\
y_0 \arrow[rr] \arrow[urruu] & & x_0
\end{tikzcd}$$

STUDIAMO QUANDO ESISTE UN SOLLEVAMENTO DI f SENZA IMPORRE $\tilde{f}(\cancel{y_0}) = \tilde{x}_0$.

SUPPONIAMO Y loc. conn. per archi e E, X connessi.

Fissiamo $y_0 \in Y$ e $x_0 = f(y_0)$

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] & \tilde{x}_0 \arrow[dd] & \tilde{x}_1 \arrow[ddl] \\
Y \arrow[r, "f"] & X & & \\
y_0 \arrow[rr] \arrow[urrruu] & & x_0 &
\end{tikzcd}$$

$\exists\ \tilde{f} : Y \longrightarrow X$ che solleva f ?

$\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_1$ con $p(\tilde{x}_1) = x_0$

Per il teorema una tale $\tilde{f}$ esiste se

$$\boxed{f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1))}$$

COROLLARIO Sia $\tilde{x}_0 \in E$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$

Allora esiste $\boxed{\tilde{f} : Y \longrightarrow E \quad \text{con} \quad p \circ \tilde{f} = f}$

se e solo se $\exists\ g \in \pi_1(X, x_0)$ tale che

$$g\, \underbrace{p_*\left(\pi_1(E, \tilde{x}_0)\right)}\, g^{-1} \supset \underbrace{f_*\left(\pi_1(Y, y_0)\right)}.$$

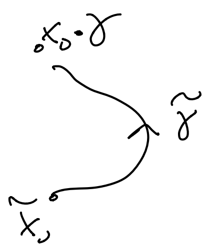
LEMMA $p: E \longrightarrow X$ $\quad \tilde{x}_0 \in E \quad x_0 \in X \quad p(\tilde{x}_0) = x_0$

Sia $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ allora

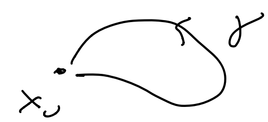
$$p_*\left(\underline{\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot \gamma)}\right) = \gamma^{-1} * p_*\left(\pi_1(E, \tilde{x}_0)\right) * \gamma$$

<u>dim</u>

$$\pi_1(E, \underline{\tilde{x}_0 \cdot \gamma})$$



$$\tilde{x}_0 \cdot \gamma = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}(1)$$



$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}$ è un cammino tra $\tilde{x}_0$ e $\underline{\tilde{x}_0 \cdot \gamma}$

$$\pi_1(E, \tilde{x}_0 \cdot \gamma) = \tilde{\gamma}^{-1} * \pi_1(E, \tilde{x}_0) * \tilde{\gamma}$$

$$p_*\left(\quad " \quad \right) = p_*\left(\quad " \quad \right)$$

$$= p_*(\tilde{\gamma}^{-1}) * p_*\left(\pi_1(E, \tilde{x}_0)\right) * p_*(\tilde{\gamma})$$

$$= \gamma^{-1} * p_*\left(\pi_1(E, \tilde{x}_0)\right) * \gamma$$

#

COROLLARIO Sia $\tilde{x}_0 \in E$ tale che $p(\tilde{x}_0) = x_0$

Allora esiste $\boxed{\tilde{f}: Y \longrightarrow E \quad \text{con} \quad p \circ \tilde{f} = f}$

se e solo se $\exists\ g \in \pi_1(X, x_0)$ tale che

$$g \underbrace{p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))}\, g^{-1} \supset \underbrace{f_*(\pi_1(Y, y_0))}$$

<u>dim</u>

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo che $\exists\, g \in \pi_1(X, x_0)$ tale che $g\,(p_*(\text{—}))\,g^{-1} \supset f_*(\text{—})$

Applico IL TEOREMA DI SOLLEVAMENTO

IMPONENDO $\boxed{\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0 \cdot \gamma = \tilde{x}_1}$

con $\gamma = g^{-1}$

Per il lemma $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_1)) \supset f_*(\pi_1(Y, y_0))$

Per il teorema $\exists_1\, \tilde{f} : p \circ \tilde{f} = f$ e $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_1$

$\boxed{\Rightarrow}$ (Dovrete essere che E è connesso)

#

APPLICHEREMO QUESTI TEOREMI AL CASO IN CUI ANCHE Y È UN RIVESTIMENTO.
(SPESSO CONSIDEREREMO SOLO RIV CONNESSI).

E ASSUMEREMO ANCHE X (E QUINDI I SUOI RIV) LOC. CONNESSI PER ARCHI.

<u>DEFINIZIONE</u> X

$p_1 : E_1 \longrightarrow X$ $\quad p_2 : E_2 \longrightarrow X$ rivestimenti

$$\mathrm{Hom}_X(E_1, E_2) = \{\varphi : E_1 \to E_2 \text{ continue} : p_2 \circ \varphi = p_1\}$$

QUESTI SI CHIAMANO I MORFISMI DI RIVESTIMENTI

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

In particolare E_1, E_2 si dicono isomorfi come rivestimenti se $\exists\, \varphi : E_1 \to E_2$ di rivestimenti e $\psi : E_2 \to E_1$ di rivestimenti tali che

$$\psi \circ \varphi = id_{E_1} \quad \text{e} \quad \varphi \circ \psi = id_{E_2}$$

Infine se $p : E \to X$ è un riv.

$$\mathrm{Aut}_X(E) = \{\varphi : E \to E \text{ omeomorfismi tali che } p \circ \varphi = p\}$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowright"] & & E \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Aut}_X(E)$ è un gruppo con la composizione.

<u>LEMMA</u> ("COMMUTAZIONE" TRA MORFISMI DI RIVESTIMENTI E AZIONE DI MONODROMIA)

$\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ $\qquad$ E_1, E_2 rivestimenti

φ morfismo di rivestim.

$p_1 \searrow \quad \swarrow p_2$

$$X$$

$x_0 \in X \qquad \tilde{x}_1 \in E_1 \qquad \tilde{x}_2 \in E_2 \qquad p_1(\tilde{x}_1) = x_1 \quad p_2(\tilde{x}_2) = x_2$

$\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$.

$\gamma \in \pi_1(X, x_0)$

$$\varphi(\underbrace{\tilde{x}_1 \cdot \gamma}) = \varphi(\tilde{x}_1) \cdot \gamma = \tilde{x}_2 \cdot \gamma$$

dimostra

$$\varphi(\tilde{x}_1 \cdot \gamma) = \varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1))$$

$$\boxed{\varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_2}}$$

ovvero $\begin{cases} \varphi \circ \underline{\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(0)} = \tilde{x}_2 \\ p \circ \varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} = \gamma \end{cases}$ $\qquad \varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$

$p \circ \varphi \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} =$

$= p \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1} = \gamma$

$$\varphi(\tilde{\gamma}_{\tilde{x}_1}(1)) = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_2}(1)$$

$$\varphi(\tilde{x}_1 \cdot \gamma) = \tilde{x}_2 \cdot \gamma$$

#