MORFISMI DI RIVESTIMENTI

X loc. conn. per archi e connesso

$p: E \longrightarrow X$ un riv. connesso di X. ($\Rightarrow E$ loc. conn. per archi)

$p_i: E_i \longrightarrow X$ $i=1,2$ riv.

$\mathrm{Hom}_X(E_1, E_2) = \{ \varphi: E_1 \to E_2 : \quad p_2 \circ \varphi = p_1 \}$

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Aut}_X(E) = \{ \varphi: E \to E \quad p \circ \varphi = p \quad \varphi$ è un omeomorfismo $\}$.

$\mathrm{Aut}_X(E)$ è un gruppo che agisce su E.

OSS. 1 Se $X = G \backslash E$

Se G è un gruppo che agisce su E in modo propriamente discontinuo $p: E \longrightarrow G \backslash E$ è un rivestimento e

$$\mathrm{Aut}_X(E) = G$$

$\supset$ ogni elemento $g \in G$

$x \longrightarrow gx$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "g", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & X = G \backslash E & \end{tikzcd}$$

$\subset$ viceversa sia $\varphi \in \mathrm{Aut}_X(E)$

Sia $p(\tilde{x}_0) = x_0$

$\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1 \qquad p(\tilde{x}_1) = x_0$

$\exists\, g \in G : \tilde{x}_1 = g \cdot \tilde{x}_0$

$$\begin{tikzcd} \tilde{x}_0 \quad E \arrow[rr, "\varphi", "\sim"'] \arrow[dr, "p"'] & & E \quad \tilde{x}_1 \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

x_0

me una mappa φ tale che $p \circ \varphi = p$ e $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$

(TEOREMA SUL SOLLEVAMENTO)

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ E \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[ur, bend right, "x \mapsto gx"'] \arrow[r, "p"'] & X \end{tikzcd}$$

φ e

$x \longrightarrow gx$

hanno queste proprietà. quindi $\varphi(x) = gx$ per unicità

#

OSS. 2 $\quad Aut_X(E)$ agisce in modo libero.

dim

$$\begin{tikzcd} \tilde{x}_0 \; E \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rrrr, bend left] \arrow[ddrr, bend right] & & E \arrow[dl, "p"] & & \tilde{x}_0 \arrow[ddll] \\ & X & & & \\ & & p(\tilde{x}_0) = x_0 & & \end{tikzcd}$$

supponiamo che $\tilde{x}_0 \in E$ e che $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0$

voglio dimostrare che $\varphi = id$.

Per l'unicità che abbiamo dimostrato nel teorema di sollevamento $\varphi = id$

#

OSS. 3 $\quad Aut_X(E)$ agisce in modo propriamente discontinuo su E.

dim

Sia $\tilde{x}_0 \in E$ voglio far vedere che $\exists\, U$ int. di $\tilde{x}_0$. tale che $U \cap \varphi(U) = \emptyset$ se $\varphi \neq id$.

$p(\tilde{x}_0) = x_0$

$$\begin{tikzcd} \tilde{x}_0 \arrow[d] & \in & E \arrow[d, "p"] \\ x_0 & \in & X \end{tikzcd}$$

Sia V un intorno ben rivestito di x_0

e V connesso per archi.

$p^{-1}(V) = \coprod U_i \quad$ e $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}_0$

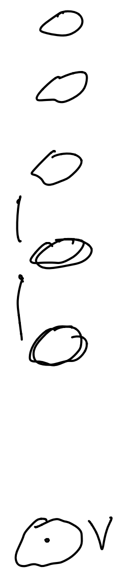
$p_i = p| \; : U_i \xrightarrow{\sim} V \quad$ omeo

U_i

in particolare U_i sono conn. per archi.

Scelgo $U = \tilde{U}_0$ e dimostro che se $\varphi \neq \mathrm{Id}$ allora

$\varphi(U) \cap U = \emptyset$.



osservo che

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & \varphi(U) \subset E \arrow[d, "p"] \\ & V \end{tikzcd}$$

$p \circ \varphi = p$

$\varphi(U)$ è conn per archi e $\varphi(U) \subset p^{-1}(V)$

quindi $\varphi(U) \subset U_i$ per qualche i. (Poiché φ è omeo, usando φ^{-1} si vede $\varphi(U) = U_i$)

e $U_i \neq U_0$ infatti:

$$\begin{tikzcd} \tilde{x}_1 = \boxed{\varphi(\tilde{x}_0)} \arrow[dr] & \neq \tilde{x}_0 \arrow[d] \in U_0 = U \\ & x_0 \end{tikzcd}$$

$\tilde{x}_0$ è l'unico punto di U_0 sopra x_0. Poiché $\tilde{x}_1$ è sopra x_0 $\quad \tilde{x}_1 \notin U_0$

$\Rightarrow \quad \varphi(U) \subset U_i \neq U_0$

$$\varphi(U) \cap U \subset U_i \cap U_0 = \emptyset$$

#

oss. 4 $\quad H = \mathrm{Aut}_X(E) \quad (\forall h \in H \quad p \circ h = p)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H \backslash E = Y \arrow[dl, "\pi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

$\exists\, \pi : Y \to X$ continua

π è un rivestimento

dim.

Sia $x_0 \in X$ e sia V un intorno ben rivestito per il rivestimento $p : E \to X$, con V conn per archi.

$$p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$$

Avevamo visto che ogni $h \in H$

$$h|_{U_i} : U_i \xrightarrow{\sim} U_j .$$

Sia $i \sim j$ se $\exists\, h$: $h|_{U_i} : U_i \to U_j$

$$\coprod_{i \in I} U_i = \coprod_{c \in I/\sim} \left(\coprod_{i \in c} U_i \right) .$$

quando costruisco $H \backslash E = Y$

$$W_c = H \Big\backslash \coprod_{i \in c} U_i \simeq U_i$$

W_c è un aperto di $\tilde{X}$

$W_c \simeq U_i \quad \forall i \in c.$ #

$$\pi^{-1}(V) = \underline{\coprod} W_c \qquad \begin{tikzcd} W_c \arrow[rr, bend left, "\pi|_{W_c}"] & \simeq U_i & \simeq V \end{tikzcd}$$

#

RELAZIONI TRA $\mathrm{Aut}_X(E)$ e $\pi_1(X)$

Calcoliamo $\mathrm{Hom}_X(E_1 ; E_2)$

Sia $x_0 \in X \qquad \tilde{x}_1 \in E_1 \qquad \tilde{x}_2 \in E_2 \qquad p_1(\tilde{x}_1) = x_0 \qquad p_2(\tilde{x}_2) = x_0$

$$\pi_1(X, x_0) \supset p_{1*}(\pi_1(E_1 ; \tilde{x}_1)) = H_1$$
$$\supset p_{2*}(\pi_1(E_2 ; \tilde{x}_2)) = H_2$$

OSS. 5

$$\mathrm{Hom}_X(E_1 ; E_2) \xleftrightarrow{\text{Teo soll}} \left\{ \underline{\tilde{y}} \in \underline{p_2^{-1}(x_0)} : \underline{p_*(\pi_1(E_2, \tilde{y})) \supset H_1} \right\}$$

$\updownarrow$ lemmi di vari $\circledast$

φ è determinata univocamente da $\varphi(\tilde{x}_1)$.

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "p_2"] \\ E_1 \arrow[ur, dashed, "\varphi"] \arrow[r, "p_1"] & X \end{tikzcd} \qquad \tilde{x}_1 \longmapsto x_0, \quad \tilde{x}_1 \longmapsto \tilde{y}$$

$$\left\{ \tilde{x}_2 \cdot \gamma : \gamma \in \pi_1(X, x_0) \quad \gamma^{-1} H_2 \gamma \supset H_1 \right\}$$

with $\tilde{y} = \tilde{x}_2 \cdot \gamma$

$\tilde{x}_2 \cdot H_2 \cdot \gamma = \tilde{x}_2 \cdot \gamma$

$\uparrow$

$H_2 \gamma$

$$\updownarrow$$

$$\boxed{\left\{ \gamma \in \pi_1(X, x_0) : \gamma^{-1} H_2 \gamma \supset H_1 \right\} \big/ H_2}$$

(*) Lemma di ieri $\quad p_*(\pi_1(E_2, \tilde{x}_2\cdot\gamma)) = \gamma^{-1} p_*(\pi_1(E_2,\tilde{x}_2))\gamma$

$$\mathrm{Hom}_X(E_1, E_2) \longleftrightarrow H_2 \backslash \{\gamma \in \pi_1(X,x_0) : \underline{\gamma^{-1} H_2 \gamma \supset H_1}\}$$

<u>Oss. 5 bis</u>

Se $\varphi : E_1 \longrightarrow E_2$ è un isomfm allora l'elemento $E_1 \longleftarrow E_2 : \psi = \varphi^{-1}$

$\varphi \rightsquigarrow \varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{y} \rightsquigarrow \tilde{y} = \cancel{\tilde{x}}_2 \cdot \gamma$ il γ che otteniamo verifica $\boxed{\gamma^{-1} H_2 \gamma = H_1}$

$E = E_1 = E_2 \qquad \tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_0 \qquad H = H_1 = H_2 = p_*(\pi_1(E,\tilde{x}_0))$

<u>TEOREMA</u>

$$\underset{\text{gruppo}}{\mathrm{Aut}_X(E)} \underset{\longleftarrow}{\overset{\Phi}{\longrightarrow}} H \backslash N_{\pi_1(X,x_0)}(H)$$

$$\left(H \backslash \underline{\{\gamma \in \pi_1(X,x_0) : \gamma^{-1} H \gamma = H\}} \right)$$

è un isomorfismo di gruppo.

dim

$\gamma \in \pi_1(X, x_0)$

$N(H)$

$\Phi(g)$ $\quad g(\tilde{x}_0) = \underline{\tilde{x}_0 \cdot \gamma} \rightsquigarrow H\gamma \in N(H)/H$

si calcola così:

$\Phi(gh)$

$g(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \gamma_g$
$h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \gamma_h$

$$\begin{aligned}(g \cdot h)(\tilde{x}_0) &= g(h(\tilde{x}_0)) = \\ &= g(\tilde{x}_0 \cdot \gamma_h) \\ &= g(\tilde{x}_0) \cdot \gamma_h \\ &= \tilde{x}_0 \cdot \gamma_g \cdot \gamma_h\end{aligned}$$

ovvero $\quad \Phi(gh) = H\gamma_g\gamma_h =$
$= H\gamma_g \cdot H\gamma_h$

#

DEFINIZIONE Un rivestimento connesso $\underbrace{}_{}$ e (loc. conn. per archi) $p : E \to X$ si dice regolare (o normale) se $\mathrm{Aut}_X(E)$ agisce transitivamente sulle fibre.

OSS. Se $\mathrm{Aut}_X(E)$ agiscono transitivamente su $p^{-1}(x_0)$ allora $\mathrm{Aut}_X(E)$ agisce transitivamente su una qualsiasi fibra $p^{-1}(x)$ con $x \in X$.

dim

considera $\mathrm{Aut}_X(E) \backslash E = Y \xrightarrow{\pi} X$

è un rivestimento. Quindi se una fibra è costituita da 1 punto lo sono tutte #

In particolare se $p: E \longrightarrow X$ è regolare allora

$$\mathrm{Aut}_X(E) \backslash E = Y \simeq X$$

PROPOSIZIONE $p: E \longrightarrow X$ $p(\tilde{x}_0) = x_0$

$$H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$$

E è un riv. regolare $\Leftrightarrow$ H è un sgr normale

dim

$$\underset{\varphi}{=\!=} \longrightarrow \varphi(\tilde{x}_0) \quad \underline{\tilde{x}_0 \gamma} \longleftarrow H\gamma$$

$$\mathrm{Aut}_X(E) \longleftrightarrow \left\{ \tilde{y} \in p^{-1}(x_0) : \dots \right\} \longleftrightarrow N_{\pi_1}(H) / H$$

$p_*(\pi_1(E, \tilde{y})) \supset H$

$\Leftarrow$ Se H è normale $N_{\pi_1}(H) = \pi_1(X, x_0)$

ovvero $\mathrm{Aut}_X(E)$ agisca transitivamente sulla fibra.

$\Rightarrow$ Se $\mathrm{Aut}_X(E)$ agisce transitivamente.

vuol dire che ottengo tutte le $\tilde{y}$ sulla fibra di x_0

ovvero tutti gli $\tilde{x}_0 \cdot \gamma$ per tutti i γ.

ovvio $\pi_1(X, x_0) / H$.

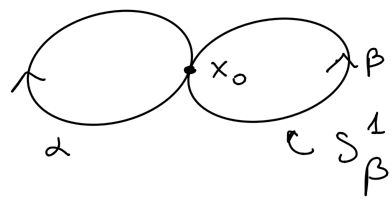
#

Esempi

1) Se G agisce in modo prop. disc. su E e $X = G \backslash E$ allora $p : E \to X$ è regolare.

$\mathrm{Aut}_X(E) = G$ che agisce transitivo sulle fibre.

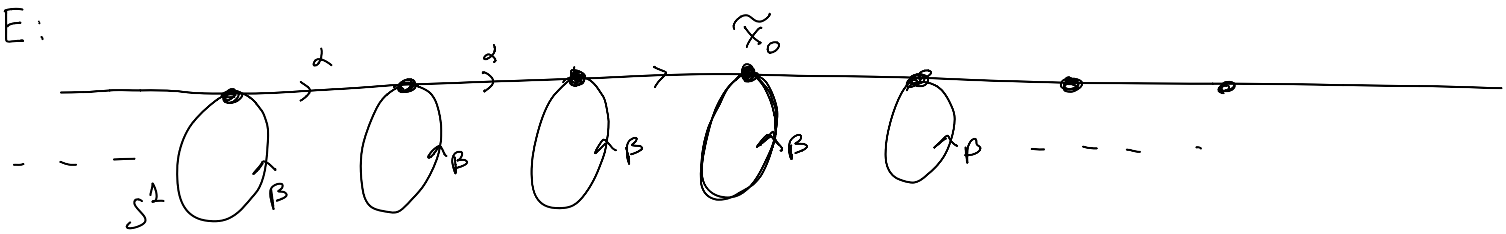
2) $X = S^1 \vee S^1$



Esempio di riv. regolare

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

E:



t

$p : E \longrightarrow X$ $\qquad$ $E = \mathbb{R} \cup$ tanti cerchietti

$$p(t) = \begin{cases} e^{2\pi i t} & t \in \mathbb{R} \\ p(z,n) = z & (z,n) \in S^1_n . \end{cases}$$

$S^1_n = S^1 \times \{n\}$.

$\mathrm{Aut}_X(E)$ sono le traslazioni per n.

Sia $\quad H = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0))$

$$\mathbb{Z} \simeq \pi_1(X, x_0) / H \longleftarrow \pi_1(X, x_0)$$

α, β

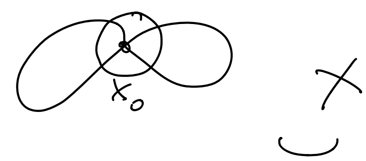
$$1 \longleftarrow \alpha$$
$$0 \longleftarrow \beta \qquad \beta \in H.$$

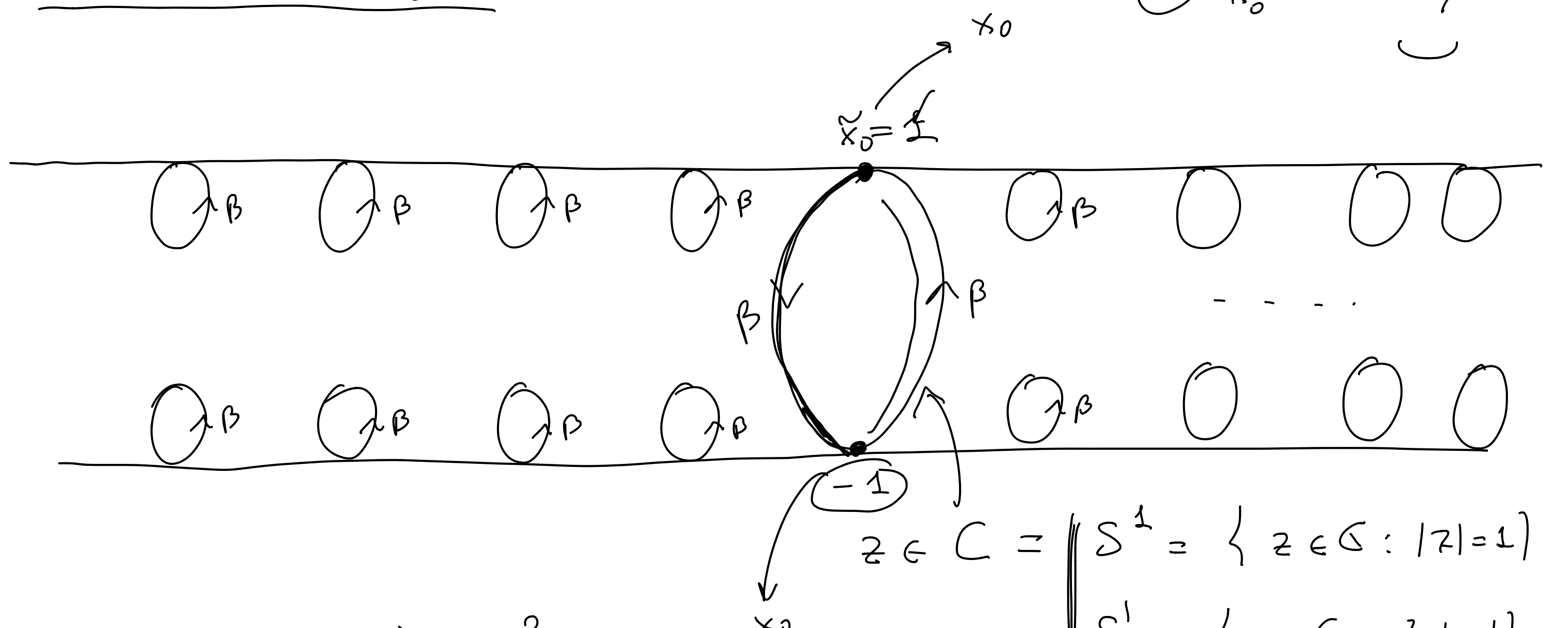
H è il nucleo

$$\langle \alpha, \beta \rangle \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\alpha \longrightarrow 1$$
$$\beta \longrightarrow 0.$$

$= \langle \beta, \alpha\beta\alpha^{-1}, \alpha^2\beta\alpha^{-2}, \dots \rangle_{\text{sgr generato}}.$

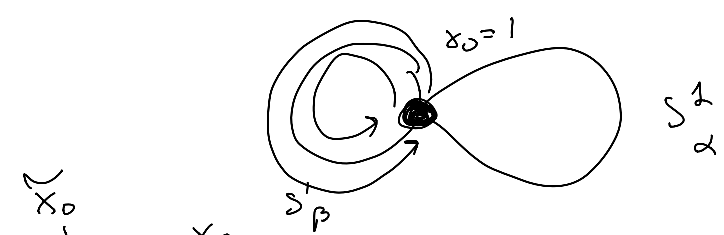
Esempio non regolare $\qquad X = S^1 \vee S^1$

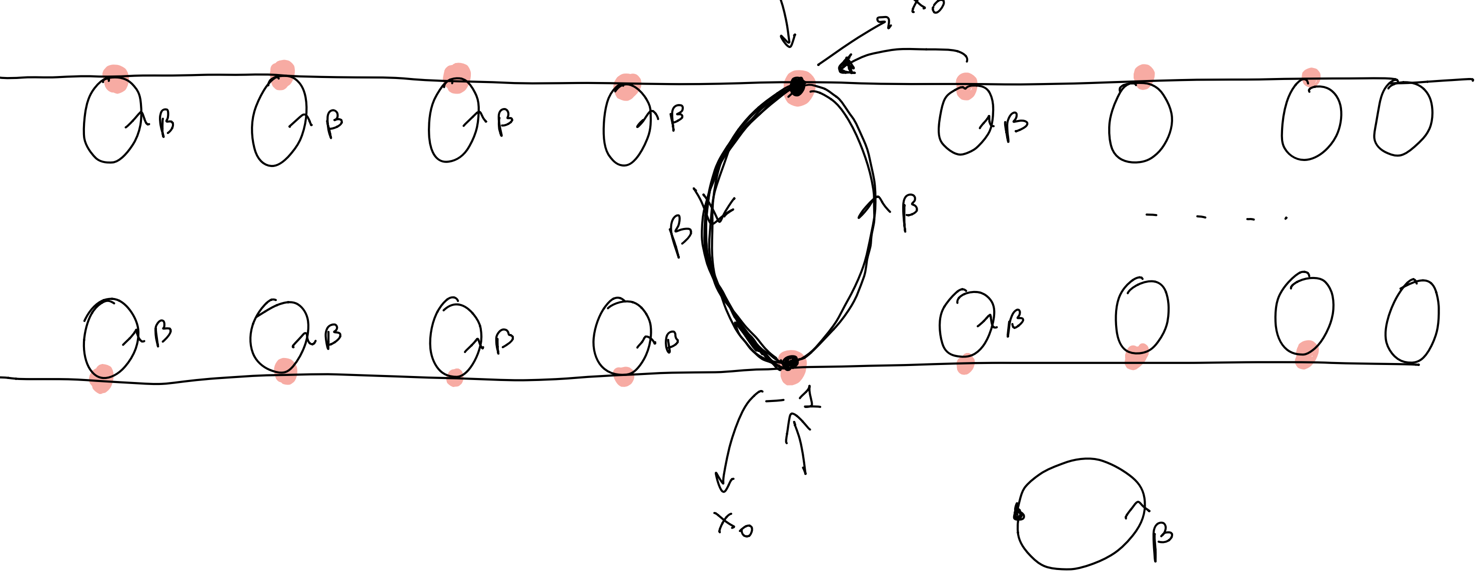




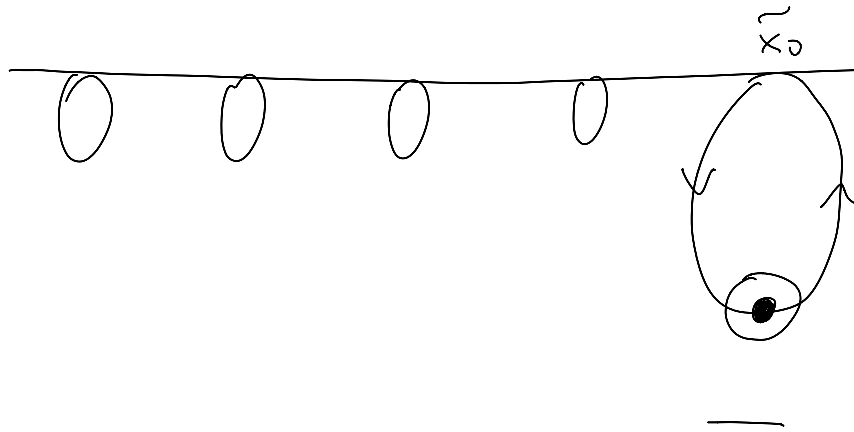
$z \in \mathbb{C} = \left\| \begin{array}{l} S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \\ S^1_\beta = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}. \end{array} \right.$

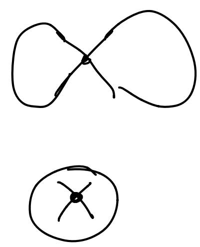
$p(z) = z^2$





$$H = \langle \beta^2, \alpha\beta\alpha^{-1}, \alpha^2\beta\alpha^{-2}, \ldots ; \rangle$$





Oss.

$E_1 \qquad E_2$ due rivestimenti regolari

$H_1 \qquad H_2$

$\cap \qquad \cap$

$\pi_1(X, x_0) \qquad \pi_1(X, x_0)$

$E_1 \simeq E_2$ come rivestimenti se $\exists\, g$

$H_1 = g H_2 g^{-1} = H_2$

$E_1 \simeq E_2$ se e solo se $H_1 = H_2$

VICEVERSA AD OGNI H NORMALE CORRISPONDE UN RIV. REGOLARE?

$H = \{id\} = p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = \{id\}$.

ovvero X ha un rivestimento semplicemente connesso?

TEOREMA Un tale rivestimento (lo si chiama riv. universale) esiste se e solo se X è semilocalmente semplicemente connesso.

IN QUESTE IPOTESI $\forall H \triangleleft \pi_1(X, x_0)$

H sgr normale esiste (unico a meno di isomorfismo) un riv. regolare $p: E \to X$ con $p_*(\pi_1(E, \tilde{x}_0)) = H$.

1ª OSS Sia $\tilde{X}$ il riv. universale. $\pi_1(\tilde{X}) = 1$

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) = \pi_1(X, x_0) \triangleright H$$

$$\mathrm{Aut}_X(\tilde{X}) \cong \frac{\pi_1(X, x_0)}{id}$$

posso costruire

$$E = H \backslash \tilde{X}$$

<u>Es. R.</u> E è un rivestimento regolare di X con $p_*(\pi_1(E, \tilde{x})) = H$.