Newton iteration per il segno di matrici:

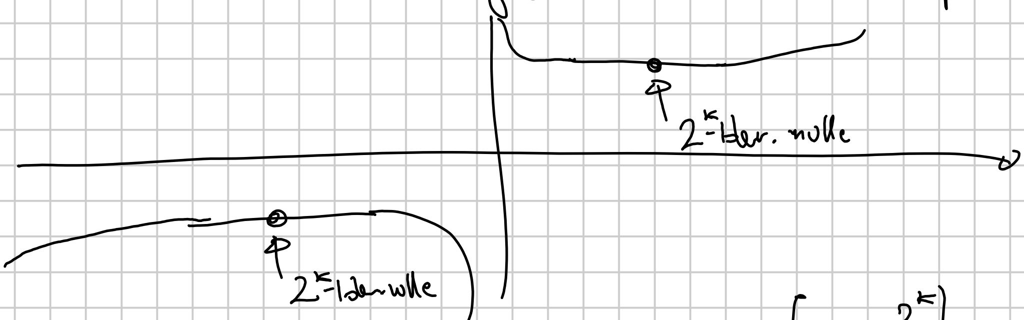
$$X_0 = M$$

$$X_{k+1} = \frac{1}{2}\left(X_k + X_k^{-1}\right) \longleftrightarrow \lambda_{i,k+1} = \frac{1}{2}\left(\lambda_{i,k} + \frac{1}{\lambda_{i,k}}\right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$g^{(k)}(x)$ è una funz. raz. di grado $(2^k, 2^k - 1)$

tale che $g(x) = \pm 1 + O(x^{2^k})$ per $x \to \pm 1$



Fatti (che non dimostro): $g^{(k)}(x) = \dfrac{\left[(x+1)^{2^k}\right]_{\text{even}}}{\left[(x+1)^{2^k}\right]_{\text{odd}}} = \dfrac{(1+x)^{2^k} + (1-x)^{2^k}}{(1+x)^{2^k} - (1-x)^{2^k}}$

$\text{sign}(x) = \dfrac{x}{(x^2)^{1/2}} = \dfrac{(x^2)^{1/2}}{x} \approx \dfrac{p(x^2)/q(x^2)}{x}$, dove $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ è un'approssim. di Padé di $\sqrt{x}$ in 1

Se x grande, $g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{2}x$

Trucco: posso rimpiazzare A di cui devo calcolare segno con μA per $\mu > 0$

se $|\Lambda(A)| \subseteq [10^3, 10^7]$, ad es., non riesco ad avere tutti dell' ordine dell'unità. Tipicamente, si cerca di ottenere un intervallo "centrato in 1" nel senso di una scala logaritmica, cioè

$$\left| \lambda_{min}(\mu A) \lambda_{max}(\mu A) \right| = 1 \qquad \text{"spectral scaling"}$$

$$\mu^2 \left| \lambda_{min}(A) \lambda_{max}(A) \right| = 1 \qquad \mu = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}(A)\lambda_{max}(A)}}$$

Se A non ha autoval. reali, posso usare valori sing./norme:

"norm scaling"

$$\underbrace{\sigma_{min}(\mu A)}_{\|(\mu A)^{-1}\|_2^{-1}} \cdot \underbrace{\sigma_{max}(\mu A)}_{\|\mu A\|_2} = 1 \Rightarrow \mu = \frac{1}{\sqrt{\sigma_{min}(A)\sigma_{max}(A)}}$$

Basta un ordine di grandezza $\Rightarrow$ basta qualche passo di un metodo delle potenze.

Altre possibilità: "determinantal scaling"

$$\det(\mu A) = 1 \Rightarrow \mu^n \det(A) = 1 \qquad \mu = \frac{1}{\det(A)^{1/n}}$$

devo calcolare $A^{-1} \Rightarrow A = LU$, $U^{-1}L^{-1} \Rightarrow \det(A) = \det(U)$ "gratis"

Quindi lo fa anche a ogni singolo passo:

$X = A$
for $k = 1 : \dots$
  calcolo μ
  $A = \mu A$
  $A = \frac{1}{2}(A + A^{-1})$
end

$\Rightarrow$ stessa fatt. LU

$\operatorname{sign}(A)$ mal cond. se $\operatorname{sep}(\Lambda(A) \cap LHP, \Lambda(A) \cap RHP)$ piccola

$\Rightarrow$ cattiva stabilità (in avanti) se sep piccola

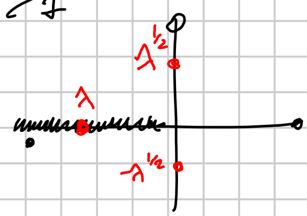
Però, i sottosp. inv. prodotti sono stabili come quelli di schur(...)

Prossima funzione: $A^{1/2}$, radice quadrata principale

definita se A non ha autoval. 0 con molteplicità ≥ 1

e non ha autoval. reali negativi

(perché così $\exists!$ radice quadrata $\subseteq$ RHP (aperto))



$A^{1/2}$ mal condizionata se ha autoval. piccoli in modulo o

autoval. vicini al "taglio"

$$\left(\text{autoval. di } L(A) \text{ sono } f[\lambda_i,\lambda_j] = \begin{cases} \dfrac{f(\lambda_i)-f(\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j} \\ f'(\lambda_j) \end{cases}\right)$$

Metodo tipo-Schur:

1) $A = QTQ^*$ $\qquad f(T) = S$

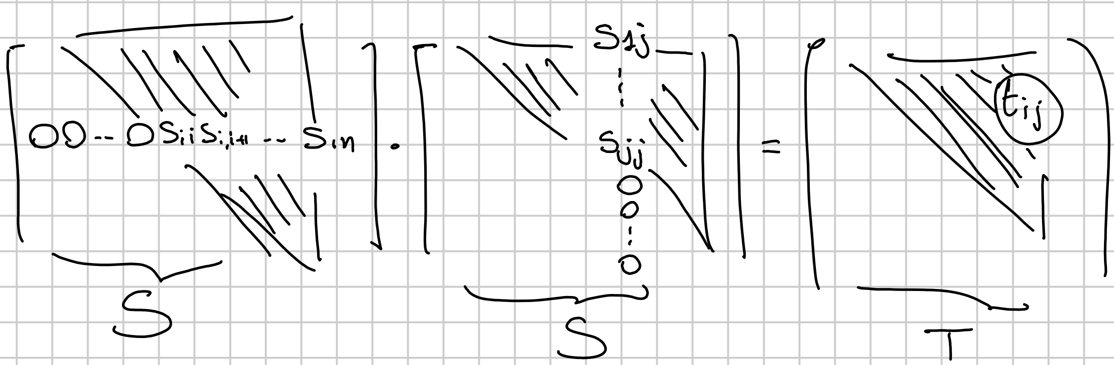
2) calcolo $s_{ii} = t_{ii}^{1/2}$

3) calcolo s_{ij} tramite ricorrenza derivata da $ST = TS$

4) $f(A) = QSQ^*$ $\qquad s_{ij} = \dfrac{----}{t_{ii} - t_{jj}}$ → instabilità se ci sono due autoval. vicini $t_{ii} \approx t_{jj}$

Nel caso della radice quadrata, c'è una variante che migliora le cose:

3') calcolo s_{ij} con ricorrenza derivata da $S^2 = T$

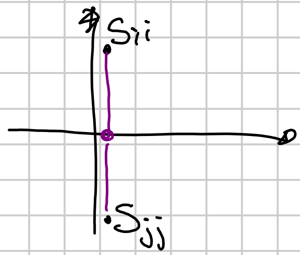


$$s_{ii}s_{ij} + \underbrace{s_{i,i+1}s_{i+1,j} + \dots + s_{i,j-1}s_{j-1,j}}_{j-1} + s_{ij}s_{jj} = t_{ij}$$

$$S_{ij} = \frac{t_{ij} - \sum_{k=i+1} S_{ik}S_{kj}}{S_{ii}+S_{jj}}$$

→ posti se lavoro per sostituzione "una diag. alla volta"

→ rischio instabilità se $S_{ii}+S_{jj}$ piccolo, però $S_{ii}, S_{jj} \in RHP \Rightarrow Re(S_{ii}+S_{jj})>0$



$S_{ii}+S_{jj}$ piccolo sse t_{ii}, t_{jj} sono vicini all'asse reale negativo da due lati diversi

---

Si riesce a dire qualcosa sulla stabilità con analisi errore all'indietro

$$S_{ij} = fl\left(\frac{\hat t_{ij} - \sum_{k=i+1}^{j-1} \hat S_{ik}\hat S_{kj}}{\hat S_{ii}+\hat S_{jj}}\right)$$

→ errore limitato da $nu \sum_{k=i+1}^{j-1} |\hat S_{ik}||\hat S_{kj}|$

$$\hat S^2 = T + \delta T \qquad |\delta T| \le |S|^2 O(nu)$$

Non è stabilità all'indietro, perché non ho $\|\delta T\| \le \|T\|$

ma solo (passando a norme) $\|\delta T\| \le \|\hat S\|^2$

→ potenzialmente instabile se c'è cancellazione e $\|S\|$ è più grande di $\|T\|^{1/2}$

Metodi basati su approssimazione con polinomi:

1) metodo di Newton su $f(X) = X^2 - A$ $\qquad f: \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}^{n^2}$: vettorizzando e posso pensare di usare Newton

$$L_{f,X}[E] = EX + XE$$

Metodo di Newton

$$X_{k+1} = X_k - H \qquad H = L_{f,X_k}^{-1}[f(X_k)] \Leftrightarrow L_{f,X_k}[H] = f(X_k)$$

$$X_kH + HX_k = X_k^2 - A$$

→ risolvo eq. di Sylvester, passo di Newton

⚠ Troppo costoso!

Il metodo di Newton scalare su $f(x)=x^2-a$ direbbe $x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-a}{2x_k}$

Trasformando scalari in matrici, otterrei $X_{k+1}=X_k-\underbrace{(2X_k)^{-1}(X_k^2-A)}_{=H_k}$

Non eq. di Sylvester, ma inversa!

Se X_0 commuta con A (per esempio $X_0=\alpha I$, $X_0=A$, ...)

allora $X_1, X_2, X_3, \dots$ commutano con A in questa iterazione,

e l'incremento H_k soddisfa

$X_kH_k+H_kX_k = 2X_kH_k = X_k^2-A$ ⇒ Newton modificato coincide con Newton "standard" in $\mathbb{R}^{n^2}$

Iterazione di Newton modificata:

$$X_0=\alpha I \text{, oppure } \alpha A$$

$$X_{k+1}=X_k-(2X_k)^{-1}(X_k^2-A)=\frac{1}{2}X_k^{-1}\left(2X_k^2-X_k^2+A\right)$$

$$=\frac{1}{2}X_k^{-1}(X_k^2+A)=\underbrace{\frac{1}{2}\left(X_k+X_k^{-1}A\right)}_{\text{quasi uguale a Newton per il segno}}$$

C'è una relazione tra i due metodi:

$$A^{-1/2}X_{k+1}=A^{-1/2}\cdot\frac{1}{2}\left(X_k+X_k^{-1}A\right)=\frac{1}{2}\left(A^{-1/2}X_k+(A^{-1/2}X_k)^{-1}\right)$$

$$Y_{k+1}=\frac{1}{2}\left(Y_k+Y_k^{-1}\right)$$

In particolare, $Y_k \to \operatorname{sign}(Y_0)$ quadraticamente

$Y_0=A^{-1/2}X_0$ → $\alpha A^{-1/2}$, se $X_0=\alpha I$, con autovalori in RHP

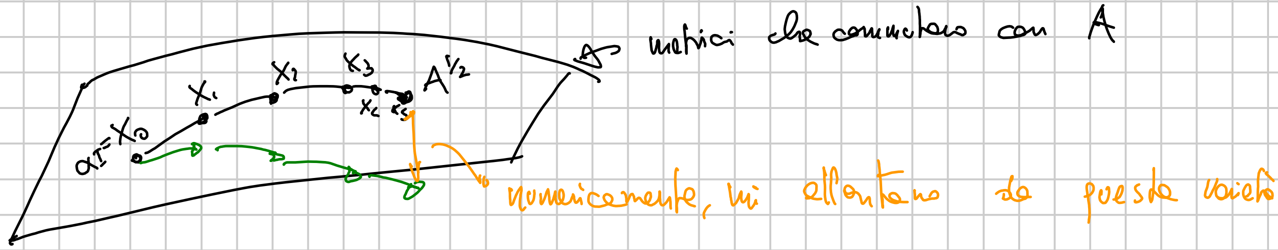
→ $\alpha A^{1/2}$ se $X_0=\alpha A$, con autovalori in RHP

⇒ $\operatorname{sign}(Y_0)=I$ ⇒ $Y_k\to I$ per $k\to\infty$

$A^{-1/2}X_k\to I$ per $k\to\infty$

$X_k\to A^{1/2}$ per $k\to\infty$

Numericamente, facile perdere proprietà che X_k commutano con A



$$X_{k+1} = g(X_k), \quad \text{dove} \quad g(X) = \frac{1}{2}\left(X + X^{-1}A\right)$$

<u>Lemma</u>: $(X+E)^{-1} - X^{-1} = -X^{-1}EX^{-1} + o(\|E\|)$, quindi $L_{f,X}[E] = -X^{-1}EX^{-1}$,

per $f(x) = x^{-1}$

$$(X+E)^{-1} - X^{-1} = (X+E)^{-1}\left(X - (X+E)\right)X^{-1} = -(X+E)^{-1}EX^{-1}$$

$$L_{g,X}[E] = \frac{1}{2}\left(E - X^{-1}EX^{-1}A\right)$$

$$\hat{L}_{g,X} = \frac{1}{2}\left(I_{n^2} - (X^{-1}A)^T \otimes X^{-1}\right)$$

Il punto $A^{1/2}$ è un punto attrattivo per g se $\hat{L}_{g,A^{1/2}}$ ha tutti autovalori < 1

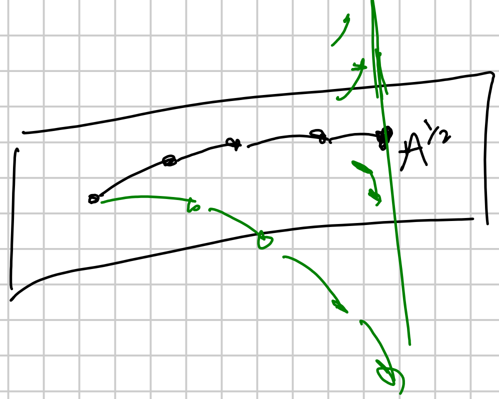
$$\hat{L}_{g,A^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(I_{n^2} - (A^{1/2})^T \otimes A^{-1/2}\right)$$

Posso prendere forme di Schur di $(A^{1/2})^T$ e $A^{-1/2}$,

ottengo autovalori $\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda_i^{1/2}\lambda_j^{-1/2}}$ $\quad i,j = 1,\dots,n$

di $\hat{L}_{g,A^{1/2}}$.

Facile trovare casi in cui questi sono > 1 in modulo $\Rightarrow$ instabile


$A^{1/2}$