$\boxed{\text{1 apr 2021}}$

$\mathbb{R}^n \qquad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad F(\vec{x}) = \varphi(r)\,\vec{x}$

$r = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$

~~essere~~ che condizioni bisogna imporre su φ in modo che $\operatorname{div} F = 0$?

$\operatorname{div} F = \sum \partial_i F_i \qquad F_i = x_i\,\varphi(r) \qquad \partial_i r = \frac{x_i}{r}$

$\partial_i F_i = \varphi(r) + x_i \varphi'(r) \cdot \partial_i r$

$= \varphi(r) + \frac{x_i^2}{r}\varphi'(r)$

$\operatorname{div} F = n\varphi(r) + \frac{\varphi'(r)}{r}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{\to\, r^2}$

$= n\,\varphi(r) + r\,\varphi'(r)$

$\operatorname{div} F = 0$

$\Updownarrow$

$r\varphi'(r) + n\varphi(r) = 0 \qquad \forall r$

$\boxed{r>0}$ $\qquad \boxed{y'(x) = -\frac{n}{x}\,y(x) \qquad x>0}$

$\varphi'(r) = -\frac{n}{r}\varphi(r)$

Eq. diff lineare

$c\,r^{-n}$ è soluzione di questa eq. (verifica diretta)

Cauchy-Lip $\Rightarrow$ tutte le soluzioni sono di questa forma

$c = \varphi(1)$

$\begin{cases} u' = F(t,u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$ $\qquad F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

F soddisfa le ipotesi del th. di Cauchy-Lip in un intorno di $(0,\alpha)$

(a) se $\boxed{F(t,x) = -F(-t,x)}$ $\Longrightarrow$ la soluz. u è pari
$u(t) = u(-t)$

(b) se $\left.\begin{array}{l} F(t,x) = F(-t,-x) \\ u(0) = \alpha = 0 \end{array}\right\}$ $\Longrightarrow$ u è dispari
$u(t) = -u(-t)$

— o —

Dim (a): $v(t) \doteq u(-t)$

$$v'(t) = \frac{d}{dt}\big(u(-t)\big) = -u'(-t) \overset{\boxed{u'(-t) = F(-t,u(-t))}}{=} -F(-t, u(-t)) = F(t, u(-t))$$

v soddisfa la stessa eq di u $\Longrightarrow$ $u(-t) = v(t) \doteq u(t)$ $\Longrightarrow$ u è pari.

$$\begin{cases} v'(t) = F(t, v(t)) \\ v(0) = u(-0) = \alpha \end{cases}$$

per l'unicità della soluzione

Es: Se non vale l'unicità potrebbero esserci soluzioni che non hanno le propr di simm. attese

$\boxed{F(t,x) = \sqrt{|x|}}$ sodd (b)

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$F(t,x) = \sqrt{|x|}$ soddisfa b ma la funzione $u(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ t^2 & t > 0 \end{cases}$ è soluzione (e non è dispari)

— o —

Sistemi lineari omogenei

$I \subseteq \mathbb{R}$

$A : I \to \mathcal{M}(m \times n)$ continua dato

$$(*) \quad Y'(t) = A(t)\, Y(t)$$

$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$ funz. vettoriale incognita.

Se $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ sono soluzioni di $(*)$

$Y : I \to \mathbb{R}^n$

considero $W = (Y_1, \ldots, Y_n)$ $\boxed{\text{matrice Wronskiana}}$

Le soluzioni del sistema $(*)$ formano un spazio vettoriale di dimensione n

La matrice $W'(t) = A(t)\, W(t)$

OSS$_1$: Se le $Y_1, \dots, Y_n$ sono soluzioni linearmente dipendenti $\Rightarrow \det W(t_0) = 0$ $(t_0 \in I)$

ovvio: la lin. dipendenza $\Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq \underline{0}$ t.c. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t) = 0 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \sum \lambda_i Y_i(t_0) = 0 \Rightarrow \det W(t_0) = 0$

OSS$_2$: Se $\det(W(t_0)) = 0 \Rightarrow Y_1, \dots, Y_n$ sono lin. dipendenti

conseguenza dell'unicità

$\det(W(t_0)) = 0 \Rightarrow Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0)$ sono lin dip $\Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq \underline{0} : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t_0) = 0$

$Y(t) \doteq \sum_i \lambda_i Y_i(t)$ è sol di $(*)$ con $Y(t_0) = 0$

$\Rightarrow Y(t) \equiv 0 \quad \forall t \in I$ cioè $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t) = 0 \quad \forall t \in I$

Conseguenza: $(Y_1, \dots, Y_n)$ è un base dello spazio delle soluzioni

$\Leftrightarrow \det(Y_1(t_0), \dots, Y_n(t_0)) \neq 0$ per $t_0 \in I$

Prop: Se $W(t)$ è matrice wronskiana per $(*)$ e $w(t) \doteq \det(W(t))$

Allora $w'(t) = a(t)\, w(t)$ con $a(t) = tr(A(t))$

Dim: $\phi(M) = \det(M)$

$$\boxed{d\phi(M)[H] = tr(HM^{-1}) \det(M)}$$

$\det(M + \varepsilon H) = \det((I + \varepsilon H M^{-1}) M) = \det(I + \varepsilon H M^{-1}) \det(M)$

$= [1 + \varepsilon\, tr(HM^{-1}) + o(\varepsilon)] \det(M)$

$$w'(t) = \frac{d}{dt}\Big(\phi(W(t))\Big) = d\phi(W(t))\,[W'(t)]$$

$$= \mathrm{tr}\left(W'(t)\,W(t)^{-1}\right)\det(W(t))$$

$$\overset{(*)}{=} \mathrm{tr}\left(A(t)\,\cancel{W(t)}\,\cancel{W(t)^{-1}}\right)\det(W(t))$$

$$\boxed{w'(t) = \mathrm{tr}(A(t))\,w(t)}$$

caso particolare del caso visto a lezione

$A(t) \equiv A$

e $W(t_0) = I$ $\to$ $W' = AW$

$\Rightarrow$ $W(t) = e^{(t-t_0)A}$

Es: x casa Mostrare che se $A(t)$ è antisimmetrica

$${}^{T}A(t) + A(t) = 0 \quad \forall\, t \in I$$

e W è la matrice Wronskiana t.c.

$$\begin{cases} W'(t) = A(t)W(t) \\ W(0) = Id \end{cases}$$

allora ${}^{T}W(t)\,W(t) = I \quad \forall t$

sugg: Derivare questa relazione

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

con A non dipendente da t

La soluzione di questo problema di Cauchy è

$$Y(t) = e^{(t-t_0)A}\,Y_0$$

$$\boxed{e^{tA} \doteq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}}$$

Q: Come calcolare in pratica l'esp. di una matrice

OSS: Se $A = MCM^{-1}$ (*) (con C matrice più semplice, p. es. C matrice diagonale) allora

$$e^{tA} = M e^{tC} M^{-1}$$

Dim: (*) $\Rightarrow A^k = (MCM^{-1})^k = M C^k M^{-1}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} M \frac{t^k C^k}{k!} M^{-1} = M \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k C^k}{k!} \right) M^{-1}$$

—— o ——

Es. di appl.

Se $C = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ $\quad e^{tC} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n})$

Nel caso generale $A = MCM^{-1}$ con C in forma canonica di Jordan

$$C = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix} \qquad B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_j \end{pmatrix} \quad \text{Blocco di Jordan}$$

$$e^{tC} = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tB_n} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad B \in \mathcal{M}(\ell \times \ell) \qquad e^{tB} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k B^k}{k!}$$

$$B = \lambda I + N \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = e^{t(\lambda I)} \cdot e^{tN} \quad \longleftarrow \quad e^{t\lambda I} = e^{t\lambda} \cdot I$$

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k N^k}{k!} \quad \longleftarrow \text{somma finita}$$

$$N^0 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad N^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N: \begin{aligned} e_1 &\longrightarrow 0 \\ e_2 &\longrightarrow e_1 \\ e_j &\longrightarrow e_{j-1} \quad (j \geq 2) \end{aligned} \qquad N^2: \begin{aligned} e_1 &\xrightarrow{N} 0 \xrightarrow{N} 0 \\ e_2 &\to e_1 \to 0 \\ e_3 &\to e_2 \to e_1 \\ e_j &\longrightarrow e_{j-2} \quad (j \geq 3) \end{aligned}$$

$$e^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & & \frac{t^{\ell-1}}{(\ell-1)!} \\ & 1 & t & t^2/2 & \\ & & 1 & t & t^2/2 \\ & & & 1 & t & t^2/2 \\ & 0 & & & 1 & t \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} & \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

Attenzione:
La forma canonica di Jordan vale per matrici su $\mathbb{C}$

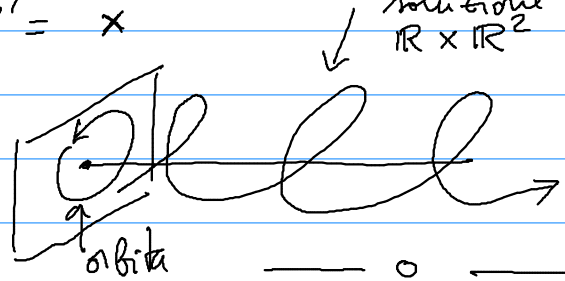
~~Analisi 29~~

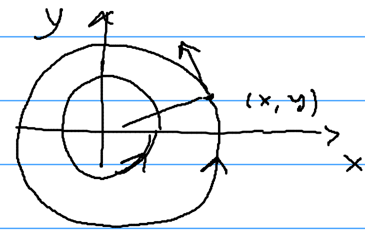
Analogia $\longrightarrow$ $\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \quad (*) \\ (f_0 = f_1 = 1) \end{cases}$

$\exists$ sol di $(*)$ nella forma $\rightarrow$ $f_n = \lambda^n$ $\qquad \lambda_\pm \in \mathbb{R}$

Classificazione dei sistemi lineari 2x2 autonomi

Es: $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$





---

considero $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$
$$= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det(A)$$

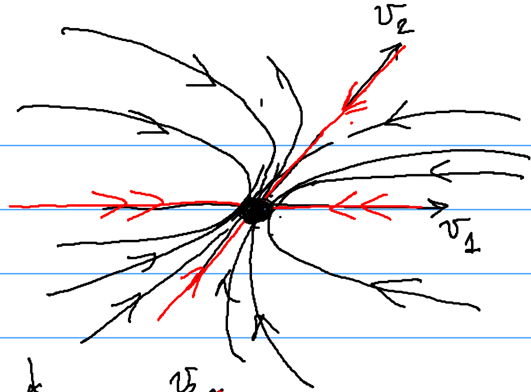
(considero i casi con $\det A \neq 0$)

<u>Caso 1</u>: $\lambda_1 < \lambda_2$ autovalori reali distinti con autovettori v_1, v_2

La soluzione generale $c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2$

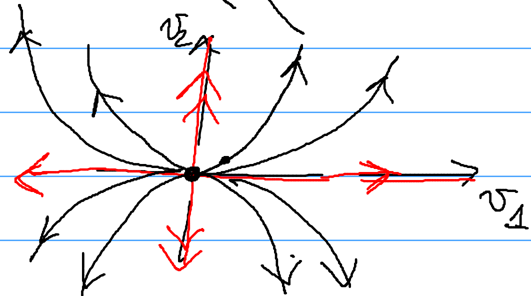
(1a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

si dice che 0 è un nodo stabile



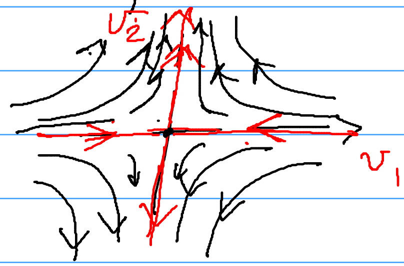
(1a') $0 < \lambda_1 < \lambda_2$

è analog
(invertendo il tempo
(0 è un nodo instabile)



(b) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

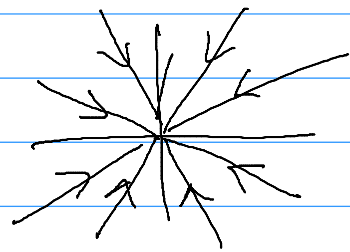
punto instabile



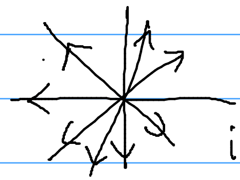
__Caso 2__: un unico autovalore $\lambda = \frac{a+d}{2}$

(2a) $b = c = 0$ la matrice è $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

ho un nodo a stella



$\lambda < 0$
stabile



instabile

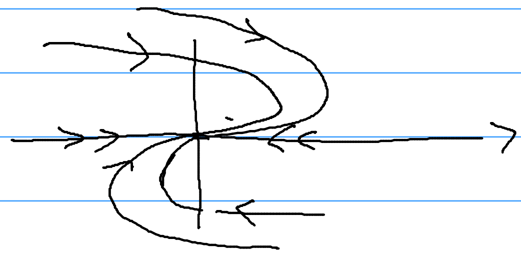
$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

<u>Caso 2b</u>: La forma canonica della matrice è del tipo $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\lambda < 0$

In questo caso le soluzioni sono del tipo

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$



$c_2 = 0$

CONTROLLARE

<u>Caso 3</u>: Due autovalori complessi

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$$

Forma canonica è $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

e le soluzioni si scrivono facilmente in coord polari $\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$

calcoli $\boxed{\text{x esercizio}}$,

$$\boxed{\begin{cases} \rho' = \alpha \rho \\ \theta' = \beta \end{cases}}$$