Esercizi del corso di Analisi 2 (Scheda 7)

Esercizio 1

Siano A una matrice quadrata e $\mathbf{f}$ una funzione vettoriale a variabile reale. In ognuno dei seguenti casi si calcoli la matrice e^{tA} per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si utilizzi questo risultato per determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{f}.$$

(i)

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) := \begin{bmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

(ii)

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Data l'equazione differenziale

$$y' = x^3(e^{2-y^2} - 1),$$

si tracci un grafico qualitativo delle linee integrali in tutto il loro insieme di esistenza.

Esercizio 3

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan(y) - \dfrac{1}{x} \\ y(1) = b \end{cases},$$

al variare di $b \in \mathbb{R}$.

(a) Si discutano esistenza e unicità locali;

(b) si determini l'intervallo massimale di esistenza;

(c) si stabilisca se esistono asintoti obliqui;

(d) si dimostri che esiste un unico b tale che la soluzione corrispondente esiste in $(0, +\infty)$ e tende a zero per $x \to +\infty$;

(e) si tracci un grafico qualitativo delle soluzioni.